

RADICALES

1. DEFINICIÓN

Sea a un número real cualquiera y n un número natural mayor o igual que 2. Se define la raíz n -ésima de a como:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$\sqrt{\quad}$ = signo radical

n = índice del radical (cuando es 2 no se escribe)

a = radicando

Ejemplos

a) $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$

c) $\sqrt{-16} = \nexists$ (no existe)

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

d) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ porque $(-3)^4 = 81$ y $3^4 = 81$

Distinguiremos los siguientes casos:

I) El índice (n) es un número par

- Si $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \pm b$, es decir, “ a ” tiene dos raíces reales de valores opuestos.
- Si $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$
- Si $a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}$ no existe ya que no existe ningún número real que elevado a exponente par sea negativo.

II) El índice (n) es un número impar

Entonces $\sqrt[n]{a}$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$, es única y tiene el mismo signo que “ a ”.

2. EXPRESIÓN DE RADICALES EN FORMA DE POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$

c) $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[7]{2^4} = 2^{\frac{4}{7}}$

3. PROPIEDADES DE LOS RADICALES

<p>1) $\sqrt[n]{a^n} = a$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$\sqrt[3]{5^3} = 5$</p>	<p>2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{5} = \sqrt[8]{10}$</p>	<p>3) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2}$</p>
<p>4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$(\sqrt[5]{3})^4 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$</p>	<p>5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[15]{6}$</p>	<p>6) $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$</p> <p><u>Ejemplo</u></p> <p>$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^{1 \cdot 5}} = \sqrt[15]{2^5}$</p>

4. RADICALES EQUIVALENTES

Para obtener radicales equivalentes a uno dado se multiplica el índice y el exponente del radicando por un mismo número distinto de cero.

Ejemplo: $\sqrt[5]{2^2} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[20]{2^8} = \dots$

5. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar un radical se divide el índice del radical y el exponente del radicando por un divisor común. Cuando un radical no se puede simplificar diremos que es un radical irreducible.

Ejemplos

a) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[15]{64} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

c) $\sqrt[12]{a^8 \cdot b^4} = \sqrt[6]{a^2 \cdot b}$

6. INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UN RADICAL

Para introducir un factor dentro del radical se eleva dicho factor al índice.

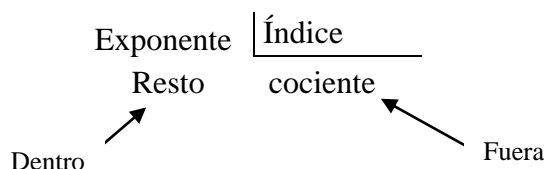
Ejemplos

a) $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

b) $2^3 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot 5} = \sqrt{2^6 \cdot 5} = \sqrt{320}$

7. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL

- 1) Se descompone el radicando en producto de factores primos.
- 2) Podemos extraer factores del radical si el exponente del factor es \geq que el índice del radical.
- 3) Se divide el exponente entre el índice. El cociente de esta división es el exponente del factor que sale fuera y el resto el exponente del factor que queda dentro.



Ejemplos

a) $\sqrt[3]{384} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3} = 4\sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt[3]{\frac{32}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^5}{3^3}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2^2}{1}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{4}$

8. REDUCCIÓN DE RADICALES A ÍNDICE COMÚN

Consiste en obtener radicales equivalentes a los dados que tengan todos ellos el mismo índice.

- El índice común de los radicales es el m.c.m. de los índices.
- El nuevo exponente de los factores del radicando se obtiene multiplicando su exponente por el cociente de la división (índice común : índice del factor)

Ejemplo

$$\sqrt{2a} \quad \sqrt[4]{a^3} \quad \sqrt[3]{3a^5} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(2, 4, 3)=12} \sqrt[12]{(2a)^6} \quad \sqrt[12]{(a^3)^3} \quad \sqrt[12]{(3a^5)^4} \longrightarrow \sqrt[12]{64a^6} \quad \sqrt[12]{a^9} \quad \sqrt[12]{81a^{20}}$$

9. OPERACIONES CON RADICALES

9.1. SUMA Y RESTA

Para poder sumar (restar) radicales es necesario que sean radicales semejantes, es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

$$A) 3\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$B) 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \rightarrow \text{No son radicales semejantes} \Rightarrow \text{no podemos efectuar la operación, se deja indicado.}$$

Para sumar o restar radicales procedemos de la siguiente manera:

I) Si son semejantes se opera como en A)

II) Si no son semejantes:

- 1) Se descomponen los números que aparecen en el radicando en producto de factores primos.
- 2) Se extraen factores del radical
- 3) Si los radicales son semejantes se opera como en A); si no son semejantes, se deja la operación indicada como en B)

Ejemplos

$$a) 3\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 11\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 7\sqrt{5} \quad (\text{como son semejantes operamos directamente; } 3+9-11+6=7)$$

$$b) 2\sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{75} = 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{3^3} + 5\sqrt{3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5 \cdot 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 25\sqrt{3} = 26\sqrt{3}$$

(1) Descomponemos en factores primos los radicandos

(2) Extraemos factores

(3) Operamos

9.2. PRODUCTO DE RADICALES

I) Radicales con el mismo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3}$$

(1) Descomponemos en factores primos los radicandos

(3) Reducimos aplicando propiedades de las potencias

(2) Operamos

(4) Extraemos factores

II) Radicales con distinto índice

- 1) Se reducen los radicales a índice común (si es necesario se factorizan previamente los radicandos)
- 2) Se opera como en el caso I)

Ejemplo

$$\sqrt{32} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[6]{2^{15}} \cdot \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^{19}} = 2^3 \cdot \sqrt[6]{2} = 8\sqrt[6]{2}$$

(1) Factorizamos los radicandos

(3) Operamos

(2) Reducimos a índice común

(4) Extraemos factores

9.3. COCIENTE DE RADICALES

I) Radicales con el mismo índice

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$$

Ejemplo $\sqrt{24} : \sqrt{3} = \sqrt{24:3} = \sqrt{8}$

II) Radicales con distinto índice

- 1) Se reducen los radicales a índice común (si es necesario se factorizan previamente los radicandos)
- 2) Se opera como en el caso I)

Ejemplos

$$a) \sqrt[4]{4a^6} : \sqrt[3]{2a^4} = \sqrt[4]{2^2 \cdot a^6} : \sqrt[3]{2 \cdot a^4} = \sqrt[12]{2^6 \cdot a^{18}} : \sqrt[12]{2^4 \cdot a^{16}} = \sqrt[12]{2^2 \cdot a^2} = \sqrt[6]{2a}$$

(1) Factorizamos los radicandos (2) Reducimos a índice común (3) Operamos (4) Simplificamos

$$b) \frac{\sqrt{108x}}{\sqrt[6]{12x^3}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot x}}{\sqrt[6]{2^2 \cdot 3 \cdot x^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^6 \cdot 3^9 \cdot x^3}}{\sqrt[6]{2^2 \cdot 3 \cdot x^3}} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^8} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{2^2} = 3\sqrt[3]{4}$$

(1) Factorizamos los radicandos (2) Reducimos a índice común (3) Operamos (4) Simplificamos (5) Extraemos factores

10. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

A) El denominador es un monomio con un radical cuadrático $\rightarrow \frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por el radical que aparece en el denominador y se opera.

Ejemplo

$$\frac{6\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(6\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2}{3 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{6\sqrt{6} + 2}{6} = \frac{3\sqrt{6} + 1}{3}$$

B) El denominador es un binomio con radicales cuadráticos $\rightarrow \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por el conjugado del denominador y se opera.

El conjugado de $(A + B)$ es $(A - B)$

Ejemplo

$$\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{3\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} + 1) \cdot (2\sqrt{3} - 1)} = \frac{6\sqrt{18} - 3\sqrt{6}}{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{6\sqrt{2 \cdot 3^2} - 3\sqrt{6}}{4 \cdot 3 - 1} = \frac{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{12 - 1} = \frac{18\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{11}$$

C) El denominador es un monomio con un radical n-ésimo $\rightarrow \frac{a}{b \cdot \sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$ y se opera.

Ejemplo

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6^2}} = \frac{3\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{3\sqrt[3]{36}}{6} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$