Ejercicio 1

a) $2x-8=2(x-4)$ Raíz $=\{4\}$

b) $-5x+15=-5(x-3)$ Raíz $=\{3\}$

c) $5x-25=5(x-5)$ Raíz $=\{5\}$

d) $4x+13=4\left(x+\dfrac{13}{4}\right)$ Raíz $=\left\{-\dfrac{13}{4}\right\}$

e) $3x-11=3\left(x-\dfrac{11}{3}\right)$ Raíz $=\left\{\dfrac{11}{3}\right\}$

f) $6x+15=6\left(x+\dfrac{15}{6}\right)=6\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$ Raíz $=\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

g) $-9x+24=-9\left(x-\dfrac{24}{9}\right)=-9\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$ Raíz $=\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

h) $-8x+16=-8(x-2)$ Raíz $=\{2\}$

i) $3x+1=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ Raíz $=\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

Ejercicio 2

a) $-3x^2+2x+5$

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$-3x^2+2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot 5}}{2\cdot(-3)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{-6}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{-6}=\frac{-2\pm 8}{-6}=\begin{cases}\underline{x=-1}\\ \underline{x=\dfrac{5}{3}}\end{cases}$$

2º) Factorización: $\underline{-3x^2+2x+5=-3(x+1)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)}$ $\underline{\text{Raíces}=\left\{-1\ ,\ \dfrac{5}{3}\right\}}$

b) $3x^2-6x-9$

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-9)}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{144}}{6}=\frac{6\pm 12}{6}=\begin{cases}\underline{x=3}\\ \underline{x=-1}\end{cases}$$

2º) Factorización: $\underline{3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)}$ $\underline{\text{Raíces}=\{3,-1\}}$

c) $3x^2-5x+2$

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$3x^2-5x+2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6}=\begin{cases}\underline{x=1}\\ \underline{x=\frac{2}{3}}\end{cases}$$

2º) Factorización: $\underline{3x^2-5x+2=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}$ $\quad$ $\underline{\text{Raíces}=\left\{1\ ,\frac{2}{3}\right\}}$

d) $2x^2+x+3$

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$2x^2+x+3=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}=\text{no tiene solución real}$$

2º) Factorización: $(2x^2+x+3)$ <u>es irreducible</u>

e) x^2+x-20

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$x^2+x-20=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{-1\pm9}{2}=\begin{cases}\underline{x=4}\\ \underline{x=-5}\end{cases}$$

2º) Factorización: $\underline{x^2+x-20=(x-4)(x+5)}$ $\quad$ $\underline{\text{Raíces}=\{4,-5\}}$

f) $6x^2+x-1$

1º) Hallamos las raíces del polinomio:

$$6x^2+x-1=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm5}{12}=\begin{cases}\underline{x=\frac{1}{3}}\\ \underline{x=-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

2º) Factorización: $\underline{6x^2+x-1=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ $\quad$ $\underline{\text{Raíces}=\left\{\frac{1}{3}\ ,-\frac{1}{2}\right\}}$

Ejercicio 3

1) $3x^2-6x=\boxed{3x\cdot(x-2)}$	$\text{Raíces}=\{0,\ 2\}$
2) $-2x^2+8x=\boxed{-2x\cdot(x-4)}$	$\text{Raíces}=\{0,\ 4\}$
3) $-4x^3+12x^2=\boxed{-4x^2\cdot(x-3)}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),3\}$
4) $5x^3-15x^2=\boxed{5x^2\cdot(x-3)}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),\ 3\}$
5) $-3x^3+12x^2=\boxed{-3x^2\cdot(x-4)}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),\ 4\}$
6) $-2x^4-4x^3=\boxed{-2x^3\cdot(x+2)}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{triple}),\ -2\}$
7) $x^3-16x^2+64x=x\cdot(x^2-16x+64)=\boxed{x\cdot(x-8)^2}$	$\text{Raíces}=\{0,\ 8\,(\text{doble})\}$
8) $3x^4+30x^3+75x^2=3x^2\cdot(x^2+10x+25)=\boxed{3x^2\cdot(x+5)^2}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),\ -5\,(\text{doble})\}$
9) $4x^5-36x=4x\cdot(x^4-9)=4x\cdot(x^2+3)\cdot(x^2-3)=\boxed{4x\cdot(x^2+3)\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})}$ $\text{Raíces}=\{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$	
10) $x^5-x^4+\frac{1}{4}x^3=x^3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=\boxed{x^3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$	$\text{Raíces}=\left\{0\,(\text{triple}),\frac{1}{2}\,(\text{doble})\right\}$
11) $5x^3-10x^2+5x=5x\cdot(x^2-2x+1)=\boxed{5x\cdot(x-1)^2}$	$\text{Raíces}=\{0,1\,(\text{doble})\}$
12) $3x^3+6x^2+3x=3x\cdot(x^2+2x+1)=\boxed{3x\cdot(x+1)^2}$	$\text{Raíces}=\{0,-1\,(\text{doble})\}$
13) $a^4-16a^2=a^2\cdot(a^2-16)=\boxed{a^2\cdot(a+4)\cdot(a-4)}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),\ -4,4\}$
14) $5x^3+40x^2+80x=5x\cdot(x^2+8x+16)=\boxed{5x\cdot(x+4)^2}$	$\text{Raíces}=\{0,-4\,(\text{doble})\}$
15) $2x^5-12x^4+18x^3=2x^3\cdot(x^2-6x+9)=\boxed{2x^3\cdot(x-3)^2}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{triple}),\ 3\,(\text{doble})\}$
16) $3x^6-3x^2=3x^2\cdot(x^4-1)=3x^2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)=\boxed{3x^2\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$ $\text{Raíces}=\{0\,(\text{doble}),\ -1,\ 1\}$	
17) $x^5-6x^4+9x^3=x^3\cdot(x^2-6x+9)=\boxed{x^3\cdot(x-3)^2}$	$\text{Raíces}=\{0\,(\text{triple}),3\,(\text{doble})\}$

18) $-2x^3-24x^2-72x=-2x\cdot(x^2+12x+36)=\boxed{-2x\cdot(x+6)^2}$	Raíces = { 0 ,–6 (doble) }
19) $9x^6-225x^2=9x^2\cdot(x^4-25)=9x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x^2-5)=\boxed{9x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})}$ Raíces = { 0 (doble), $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ }	
20) $5x^4-80x^2=5x^2\cdot(x^2-16)=\boxed{5x^2\cdot(x+4)\cdot(x-4)}$	Raíces = { 0 (doble),–4, 4 }
21) $-15x^4+60x^3-60x^2=-15x^2\cdot(x^2-4x+4)=\boxed{-15x^2\cdot(x-2)^2}$	Raíces = { 0 (doble), 2 (doble) }
22) $-3x^3-24x^2-48x=-3x\cdot(x^2+8x+16)=\boxed{-3x\cdot(x+4)^2}$	Raíces = { 0, – 4 (doble) }
23) $-5x^5+405x=-5x\cdot(x^4-81)=-5x\cdot(x^2+9)\cdot(x^2-9)=\boxed{-5x\cdot(x^2+9)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}$ Raíces = { 0 , – 3, 3 }	
24) $x^3-\frac{16}{100}x=x^3-\frac{4}{25}x=x\cdot\left(x^2-\frac{4}{25}\right)=\boxed{x\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{5}\right)}$	Raíces $=\left\{0,-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right\}$
25) $3x^4-12=3\cdot(x^4-4)=3\cdot(x^2+2)\cdot(x^2-2)=\boxed{3\cdot(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$	Raíces = { $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ }
26) $-5x^5+320x=-5x\cdot(x^4-64)=-5x\cdot(x^2+8)\cdot(x^2-8)=\boxed{-5x\cdot(x^2+8)\cdot(x+\sqrt{8})\cdot(x-\sqrt{8})}$ Raíces = { 0 , $-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$ }	
27) $2x^4-50x^2=2x^2\cdot(x^2-25)=\boxed{2x^2\cdot(x+5)\cdot(x-5)}$	Raíces = { 0 (doble), – 5 , 5 }
28) $-5x^4-50x^3-125x^2=-5x^2\cdot(x^2+10x+25)=\boxed{-5x^2\cdot(x+5)^2}$	Raíces = { 0 (doble) , – 5 (doble) }
29) $m^5+m^4+\frac{1}{4}m^3=m^3\cdot\left(m^2+m+\frac{1}{4}\right)=\boxed{m^3\cdot\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}$	Raíces $=\left\{0\text{ (triple)},-\frac{1}{2}\text{ (doble)}\right\}$
30) $2x^6-50x^2=2x^2\cdot(x^4-25)=2x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x^2-5)=\boxed{2x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})}$ Raíces = { 0 (doble), $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ }	

Ejercicio 4

a) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 15x$

1º) Extraemos factor común x: $P(x) = x \cdot (2x^2 - 7x - 15)$

2º) Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(2x^2 - 7x - 15)$

- $2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \dfrac{7 \pm 13}{4} = \begin{cases} \underline{x = 5} \\ \underline{x = -\dfrac{3}{2}} \end{cases}$
- $2x^2 - 7x - 15 = 2(x-5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

3º) Factorización: $\underline{P(x) = 2x(x-5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)}$ $\underline{\text{Raíces} = \left\{0\,,5\;,-\dfrac{3}{2}\right\}}$

b) $P(x) = -2x^4 + 6x^3 + 8x^2$

1º) Extraemos factor común $-2x^2$: $P(x) = -2x^2(x^2 - 3x - 4)$

2º) Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(x^2 - 3x - 4)$

- $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \underline{x = 4} \\ \underline{x = -1} \end{cases}$
- $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

3º) Factorización: $\underline{P(x) = -2x^2(x-4)(x+1)}$ $\underline{\text{Raíces} = \{\,0\,(\text{doble})\,,\ 4\,,-1\}}$

c) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 4x$

1º) Extraemos factor común x: $P(x) = x(3x^2 - 11x - 4)$

2º) Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(3x^2 - 11x - 4)$

- $3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \dfrac{11 \pm 13}{6} = \begin{cases} \underline{x = 4} \\ \underline{x = -\dfrac{1}{3}} \end{cases}$
- $3x^2 - 11x - 4 = 3(x-4)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$

3º) Factorización: $\underline{P(x) = 3x(x-4)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)}$ $\underline{\text{Raíces} = \left\{0\,,4\;,-\dfrac{1}{3}\right\}}$

d) $P(x) = -6x^5 - 39x^4 - 45x^3$

1º) Extraemos factor común $-3x^3$: $P(x) = -3x^3(2x^2 + 13x + 15)$

2º) Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(2x^2 + 13x + 15)$

- $2x^2 + 13x + 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{49}}{4} == \dfrac{-13 \pm 7}{4} = \begin{cases} \underline{x = -\dfrac{3}{2}} \\ \underline{x = -5} \end{cases}$

- $2x^2 + 13x + 15 = 2(x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$

3º) Factorización: $\underline{P(x) = -3x^3 \cdot 2 \cdot (x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = -6x^3(x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)}$

$\underline{\text{Raíces} = \left\{0\ (\text{triple}), -5\ , -\dfrac{3}{2}\right\}}$

e) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

1º) Extraemos factor común x: $P(x) = x(x^2 + x - 6)$

2º) Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(x^2 + x - 6)$

- $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \underline{x = 2} \\ \underline{x = -3} \end{cases}$

- $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

3º) Factorización: $\underline{P(x) = x(x-2)(x+3)}$ $\underline{\text{Raíces} = \{0, 2, -3\}}$

Ejercicio 5

a) $(x^2-16)\cdot(2x^3-20x^2+50x)\cdot(x^2+1)$

- $x^2-16=(x-4)(x+4)$
- $2x^3-20x^2+50x=2x\cdot(x^2-10x+25)=2x\cdot(x-5)^2$
- (x^2+1) es irreducible

Por tanto,

$$(x^2-16)\cdot(2x^3-20x^2+50x)\cdot(x^2+1)=\boxed{2x(x-4)(x+4)(x-5)^2(x^2+1)}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,4,-4,5\,(\text{doble})\}}$$

b) $(x^2-5x+4)\cdot(-2x^3+2x)$

- $x^2-5x+4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2}=\begin{cases}x=4\\x=1\end{cases}\quad\Rightarrow$

  $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$
- $-2x^3+2x=-2x(x^2-1)=-2x(x-1)(x+1)$

Por tanto,

$$(x^2-5x+4)\cdot(-2x^3+2x)=(x-4)(x-1)(-2x)(x-1)(x+1)=\boxed{-2x(x-1)^2(x-4)(x+1)}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,1(\text{doble}),4,-1\}}$$

c) $(x^3-x)\cdot(x^2-8x+16)\cdot(x^4-25)$

- $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$
- $x^2-8x+16=(x-4)^2$
- $x^4-25=(x^2+5)(x^2-5)=(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

Por tanto,

$$(x^3-x)\cdot(x^2-8x+16)\cdot(x^4-25)=\boxed{x(x+1)(x-1)(x-4)^2(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,-1,1,4\,(\text{doble}),-\sqrt{5},\sqrt{5}\}}$$

d) $(2x^3-8x)\cdot(x^2+4)\cdot(x^2+7x-8)$

- $2x^3-8x=2x(x^2-4)=2x(x-2)(x+2)$
- x^2+4 Es irreducible
- $x^2+7x-8=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}=\dfrac{-7\pm\sqrt{81}}{2}=\dfrac{-7\pm9}{2}=\begin{cases}x=1\\x=-8\end{cases}\;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x^2+7x-8=(x-1)(x+8)$

Por tanto,

$(2x^3-8x)\cdot(x^2+4)\cdot(x^2+7x-8)=\boxed{2x(x-2)(x+2)(x^2+4)(x-1)(x+8)}$

$\boxed{\text{Raíces}=\{0,2,-2,1,-8\}}$

e) $(x^2+1)\cdot(x^2-6x+5)\cdot(3x^3-18x^2+27x)$

- (x^2+1) es irreducible
- $x^2-6x+5=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\dfrac{6\pm4}{2}=\begin{cases}x=5\\x=1\end{cases}\;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$

- $3x^3-18x^2+27x=3x(x^2-6x+9)=3x(x-3)^2$

Por tanto,

$(x^2+1)\cdot(x^2-6x+5)\cdot(3x^3-18x^2+27x)=(x^2+1)(x-1)(x-5)3x(x-3)^2=\boxed{3x(x^2+1)(x-1)(x-5)(x-3)^2}$

$\boxed{\text{Raíces}=\{0,1,5,3\,(\text{doble})\}}$

f) $(-3x^5+75x^3)\cdot(x^4-49)$

- $-3x^5+75x^3=-3x^3(x^2-25)=-3x^3(x-5)(x+5)$
- $x^4-49=(x^2-7)(x^2+7)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

Por tanto,

$(-3x^5+75x^3)(x^4-49)=\boxed{-3x^3(x-5)(x+5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)}$

$\boxed{\text{Raíces}=\{0\,(\text{triple}),5,-5,\sqrt{7},-\sqrt{7}\}}$

g) $(-4x+8)\cdot(x^2+x+1)\cdot(-2x^3+50x)$

- $-4x+8=-4(x-2)$
- (x^2+x+1) es irreducible

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución real}$$

- $-2x^3+50x=-2x(x^2-25)=-2x(x+5)(x-5)$

Por tanto,

$$(-4x+8)\cdot(x^2+x+1)\cdot(-2x^3+50x)=\boxed{8x(x-2)(x^2+x+1)(x+5)(x-5)}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,2,-5,5\}}$$

h) $(2x^2-32)\cdot(x^5-81x)\cdot(-3x^2+15)$

- $2x^2-32=2(x^2-16)=2(x+4)(x-4)$
- $x^5-81x=x(x^4-81)=x(x^2+9)(x^2-9)=x(x^2+9)(x+3)(x-3)$
- $-3x^2+15=-3(x^2-5)=-3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

Por tanto,

$$(2x^2-32)\cdot(x^5-81x)\cdot(-3x^2+15)=\boxed{-6x(x+4)(x-4)(x^2+9)(x+3)(x-3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,-4,4,-3,3,\sqrt{5},-\sqrt{5}\}}$$

i) $(-2x^3+28x^2-98x)\cdot(-3x^2+6x-3)$

- $-2x^3+28x^2-98x=-2x(x^2-14x+49)=-2x(x-7)^2$
- $-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$

Por tanto,

$$(-2x^3+28x^2-98x)\cdot(-3x^2+6x-3)=\boxed{6x\,(x-7)^2(x-1)^2}$$

$$\boxed{\text{Raíces}=\{0,7\,(\text{doble}),1(\text{doble})\}}$$

j) $(-2x^4+14x^2)\cdot(x^2+13x+12)\cdot(6x+6)$

- $-2x^4+14x^2=-2x^2(x^2-7)=-2x^2(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$

- $x^2+13x+12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}=\dfrac{-13\pm\sqrt{121}}{2}=\dfrac{-13\pm 11}{2}=\begin{cases} x=-1 \\ x=-12 \end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x^2+13x+12=(x+1)(x+12)$

- $6x+6=6(x+1)$

Por tanto,

$(-2x^4+14x^2)\cdot(x^2+13x+12)\cdot(6x+6)=\boxed{-12x^2(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+1)^2(x+12)}$

$\boxed{\text{Raíces}=\{\,0\,(\text{doble}),-\sqrt{7}\,,\sqrt{7}\,,-1(\text{doble}),-12\,\}}$

Ejercicio 6

a) $P(x) = x^4 - 18x^2 + 32x - 15$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1,\ \pm 3, \pm 5\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -18 & +32 & -15 \\
1 & & +1 & +1 & -17 & +15 \\
\hline
 & 1 & +1 & -17 & +15 & \boxed{0} \\
1 & & +1 & +2 & -15 & \\
\hline
 & 1 & +2 & -15 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow$ $(x-1)$ es factor y $P(x) = (x-1)\cdot(x^3 + x^2 - 17x + 15)$

$\Rightarrow$ 1 es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor y $P(x) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot\underbrace{(x^2+2x-15)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 2x + 15)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 2x + 15 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 5 \end{cases} \ \Rightarrow \ x^2 + 2x + 15 = (x-3)(x-5)$$

Por tanto, $P(x) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5) = (x-1)^2(x-3)(x-5)$

Solución

$P(x) = (x-1)^2(x-3)(x-5)$	Raíces = $\{1\,(\text{doble}), 3, 5\}$

b) $P(x) = 2x^5 + 9x^4 + 9x^3 - x^2 - 3x$

- Extraemos factor común x: $\underline{P(x) = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3)}$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-3) = \{\pm 1,\ \pm 3\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & +9 & +9 & -1 & -3 \\
-1 & & -2 & -7 & -2 & +3 \\
\hline
 & 2 & +7 & +2 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -2 & -5 & +3 & \\
\hline
 & 2 & +5 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow$ $(x+1)$ es factor y $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow (x+1)$ es factor y $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot\underbrace{(2x^2+5x-3)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2 + 5x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases} \ \Rightarrow \ 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

- Por tanto, $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot(x+3) = 2x(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

Solución

$P(x)=2x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$ Raíces $=\{\,0,-1\,(\text{doble})\,,\frac{1}{2},\ -3\ \}$

c) $P(x)=x^4-5x^3-x^2+17x+12$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(12)=\{\pm1,\ \pm2,\pm3,\pm4,\ \pm6,\pm12\}$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -5 & -1 & +17 & +12 \\ -1 & & -1 & +6 & -5 & -12 \\ \hline & 1 & -6 & +5 & +12 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x)=(x+1)\cdot(x^3-6x^2+5x+12)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & & -1 & +7 & -12 \\ \hline & 1 & -7 & +12 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot\underbrace{(x^2-7x+12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2-7x+12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2-7x+12=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2}=\begin{cases}x=4\\x=3\end{cases} \Rightarrow x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$$

Por tanto, $P(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-4)\cdot(x-3)=(x+1)^2(x-4)(x-3)$

Solución

$P(x)=(x+1)^2(x-4)(x-3)$ Raíces $=\{-1\,(\text{doble})\,,4\,,3\}$

d) $P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-18)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\ \pm9,\pm18\}$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & +5 & +1 & -21 & -18 \\ -1 & & -1 & -4 & +3 & +18 \\ \hline & 1 & +4 & -3 & -18 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x)=(x+1)\cdot(x^3+4x^2-3x-18)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} +2 & & +2 & +12 & +18 \\ \hline & 1 & +6 & +9 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow +2 \text{ es raíz} \Rightarrow (x-2) \text{ es factor y } P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot\underbrace{(x^2+6x+9)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ (es una identidad notable)

Por tanto, $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)^2$

Solución

$P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)^2$ Raíces $=\{\ -1,\ 2\,,\ -3\,(\text{doble})\,\}$

e) $P(x) = 3x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 24x - 18$

- Extraemos factor común 3: $\underline{P(x) = 3 \cdot (x^4 + 4x^3 + x^2 - 8x - 6)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^4 + 4x^3 + x^2 - 8x - 6}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +4 & +1 & -8 & -6 \\
-1 & & -1 & -3 & +2 & +6 \\
\hline
 & 1 & +3 & -2 & -6 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 0 & +6 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow$ $(x+1)$ es factor y $P(x) = 3(x+1)\cdot(x^3 + 3x^2 - 2x - 6)$

$\Rightarrow -3$ es raíz $\Rightarrow$ $(x+3)$ es factor y $P(x) = 3(x+1)\cdot(x+3)\cdot \underbrace{(x^2-2)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

$x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ (es una identidad notable)

- Por tanto, $P(x) = 3(x+1)(x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Solución

$P(x) = 3(x+1)(x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ Raíces $= \{-1, -3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

f) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 23x^2 + 12x$

- Extraemos factor común y x: $\underline{P(x) = x \cdot (2x^3 - 3x^2 - 23x + 12)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{2x^3 - 3x^2 - 23x + 12}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -23 & +12 \\
-3 & & -6 & +27 & -12 \\
\hline
 & 2 & -9 & +4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow -3$ es raíz $\Rightarrow$ $(x+3)$ es factor y $P(x) = x \cdot (x+3) \cdot (2x^2 - 9x + 4)$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2 - 9x + 4)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 2(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- Por tanto, $P(x) = x \cdot (x+3) \cdot 2(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x(x+3)(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Solución

$P(x) = 2x(x+3)(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ Raíces $= \{0, -3, 4, 1/2\}$

g) $P(x) = 6x^5 + 23x^4 - 38x^3 - 15x^2$

- Extraemos factor común x^2: $\underline{P(x) = x^2 \cdot (6x^3 + 23x^2 - 38x - 15)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{6x^3 + 23x^2 - 38x - 15}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1,\ \pm 3, \pm 5,\ \pm 15\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & +23 & -38 & -15 \\ -5 & & -30 & +35 & +15 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow -5$ es raíz $\Rightarrow (x+5)$ es factor y $P(x) = x^2 \cdot (x+5) \cdot (6x^2 - 7x - 3)$

Para buscar las raíces y factorizar $(6x^2 - 7x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2 \cdot (x+5) \cdot 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 6x^2\,(x+5)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Solución

$P(x) = 6x^2(x+5)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$	Raíces = $\{\,0\,(\text{doble})\,, -5\ , 3/2\,,\ -1/3\,\}$

h) $P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(24) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 4,\ \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & +10 & +35 & +50 & +24 \\ -1 & & -1 & -9 & -26 & -24 \\ \hline & 1 & +9 & +26 & +24 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -14 & -24 & \\ \hline & 1 & +7 & +12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow (x+1)$ es factor y $P(x) = (x+1) \cdot (x^3 + 9x^2 + 26x + 24)$

$\Rightarrow -2$ es raíz $\Rightarrow (x+2)$ es factor y $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \underbrace{(x^2 + 7x + 12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 7x + 12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = -3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \cdot (x+4)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \cdot (x+4)$	Raíces = $\{-1, -2, -3, -4\}$

i) $P(x) = x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 11x + 6$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$
\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 1 & +6 & +12 & +12 & +11 & +6 \\
-1 & & -1 & -5 & -7 & -5 & -6 \\
\hline
 & 1 & +5 & +7 & +5 & +6 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -6 & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & +3 & +1 & +3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & 0 & -3 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & +1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow (x+1)$ es factor y $P(x) = (x+1)\cdot(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6)$

$\Rightarrow -2$ es raíz $\Rightarrow (x+2)$ es factor y $P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)$

$\Rightarrow -3$ es raíz $\Rightarrow (x+3)$ es factor y $P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{\text{irreducible}}$

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdot(x^2+1)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdot(x^2+1)$	Raíces = $\{-1, -2, -3\}$

j) $P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 10x$

- Extraemos factor común $2x$: $\underline{P(x) = 2x\cdot(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}$

  Posibles raíces enteras = $\text{Div}(5) = \{\pm 1,\ \pm 5\}$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & +3 & -9 & +5 \\
1 & & +1 & +4 & -5 \\
\hline
 & 1 & +4 & -5 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor y $P(x) = 2x\cdot(x-1)\cdot(x^2 + 4x - 5)$

  Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 4x - 5)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

- Por tanto, $P(x) = 2x\cdot(x-1)\cdot(x-1)(x+5) = 2x(x-1)^2(x+5)$

Solución

$P(x) = 2x(x-1)^2(x+5)$	Raíces = $\{0, 1(\text{doble}), -5\}$

k) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 6x$

- Extraemos factor común x: $\underline{P(x) = x \cdot (2x^3 + 3x^2 - 11x - 6)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{2x^3 + 3x^2 - 11x - 6}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & +3 & -11 & -6 \\
2 & & +4 & +14 & +6 \\
\hline
 & 2 & +7 & +3 & \boxed{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow 2 \text{ es raíz } \Rightarrow (x-2) \text{ es factor y } P(x) = x \cdot (x-2) \cdot (2x^2 + 7x + 3)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2 + 7x + 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases} \;\Rightarrow\; 2x^2 + 7x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

- Por tanto, $P(x) = x \cdot (x-2) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3) = 2x\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3)$

Solución

$$\boxed{P(x) = 2x\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3) \qquad \text{Raíces} = \{0, 2, -1/2, -3\}}$$

l) $P(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 6$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & +1 & +5 & -1 & -6 \\
1 & & +1 & +2 & +7 & +6 \\
\hline
 & 1 & +2 & +7 & +6 & \boxed{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow 1 \text{ es raíz } \Rightarrow (x-1) \text{ es factor y } P(x) = (x-1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 7x + 6)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
-1 & & -1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & +1 & +6 & \boxed{0}
\end{array}
\quad \Rightarrow -1 \text{ es raíz } \Rightarrow (x+1) \text{ es factor y } P(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot \underbrace{(x^2 + x + 6)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + x + 6)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \;\Rightarrow \text{ no tiene olución real } \Rightarrow (x^2 + x + 6) \text{ es irreducible}$$

Por tanto, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 6)$

Solución

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 6) \qquad \text{Raíces} = \{1, -1\}}$$

m) $P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(18) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \pm 6,\ \pm 9, \pm 18\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -11 & +9 & +18 \\
-1 & & -1 & +2 & +9 & -18 \\
\hline
 & 1 & -2 & -9 & +18 & \boxed{0} \\
2 & & +2 & 0 & -18 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow (x+1)$ es factor y $P(x) = (x+1)\cdot(x^2 - 2x^2 - 9x + 18)$

$\Rightarrow 2$ es raíz $\Rightarrow (x-2)$ es factor y $P(x) = (x+1)\cdot(x-2)\cdot \underbrace{(x^2 - 9)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ (es una identidad notable)

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-3)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x-2)(x+3)\cdot(x-3)$	Raíces = $\{-1, 2, -3, 3\}$

n) $P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + 11x^2 - 4x$

- Extraemos factor común x: $\underline{P(x) = x\cdot(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4)}$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +1 & -9 & +11 & -4 \\
1 & & +1 & +2 & -7 & +4 \\
\hline
 & 1 & +2 & -7 & +4 & \boxed{0} \\
1 & & +1 & +3 & -4 & \\
\hline
 & 1 & +3 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor y $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor y $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot \underbrace{(x^2 + 3x - 4)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 3x - 4)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$$

- Por tanto, $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+4) = x(x-1)^3(x+4)$

Solución

$P(x) = x(x-1)^3(x+4)$	Raíces = $\{0, 1\ (\text{triple}), -4\}$

o) $P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x$

- Extraemos factor común $2x$: $\underline{P(x) = 2x \cdot (x^3 - 6x^2 + 3x + 10)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}$

  Posibles raíces enteras = $\text{Div}(10) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 10\}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -6 & +3 & +10 \\ -1 & & -1 & +7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & +10 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow$ $(x+1)$ es factor y $P(x) = 2x \cdot (x+1) \cdot (x^2 - 7x + 10)$

  Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 - 7x + 10)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$$

- Por tanto, $P(x) = 2x\,(x+1)(x-5)(x-2)$

Solución

$\boxed{P(x) = 2x\,(x+1)(x-5)(x-2) \qquad \text{Raíces} = \{0, -1, 5, 2\}}$

p) $P(x) = -2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2$

- Extraemos factor común $-2x^2$: $\underline{P(x) = -2x^2 \cdot (x^3 + x^2 - x - 1)}$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^3 + x^2 - x - 1}$

  Posibles raíces enteras = $\text{Div}(1) = \{\pm 1\}$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & & +1 & +2 & +1 \\ \hline & 1 & +2 & +1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow$ $(x-1)$ es factor y $P(x) = -2x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ (es una identidad notable)

- Por tanto, $P(x) = -2x^2\,(x-1)(x+1)^2$

Solución

$\boxed{P(x) = -2x^2 (x-1)(x+1)^2 \qquad \text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}), 1, -1\,(\text{doble})\}}$

q) $P(x) = x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2$

- Extraemos factor común x^2: $\underline{P(x) = x^2 \cdot (x^3 - 10x^2 + 31x - 30)}$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^3 - 10x^2 + 31x - 30}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-30) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -10 & +31 & -30 \\ 2 & & +2 & -16 & +30 \\ \hline & 1 & -8 & +15 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 2 \text{ es raíz} \Rightarrow (x-2) \text{ es factor y } P(x) = x^2 \cdot (x-2) \cdot (x^2 - 8x + 15)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 - 8x + 15)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2(x-2)(x-5)(x-3)$

Solución

$P(x) = x^2(x-2)(x-5)(x-3)$ Raíces = $\{0\,(\text{doble}), 2, 5, 3\}$

r) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2$

- Extraemos factor común x^2: $\underline{P(x) = x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24)}$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(24) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & +2 & -13 & -14 & +24 \\ 1 & & +1 & +3 & -10 & -24 \\ \hline & 1 & +3 & -10 & -24 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -2 & +24 & \\ \hline & 1 & +1 & -12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow 1$ es raíz $\Rightarrow (x-1)$ es factor y $P(x) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)$

$\Rightarrow -2$ es raíz $\Rightarrow (x+2)$ es factor y $P(x) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot \underbrace{(x^2 + x - 12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + x - 12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Solución

$P(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ Raíces = $\{0\,(\text{doble}), 1, -2, 3, -4\}$

s) $P(x) = 4x^6 - 19x^5 - x^4 + 85x^3 - 51x^2 - 18x$

- Extraemos factor común x: $\underline{P(x) = x\cdot(4x^5 - 19x^4 - x^3 + 85x^2 - 51x - 18)}$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $\underline{4x^5 - 19x^4 - x^3 + 85x^2 - 51x - 18}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 4 & -19 & -1 & +85 & -51 & -18 \\
1 & & +4 & -15 & -16 & +69 & +18 \\
\hline
 & 4 & -15 & -16 & +69 & +18 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow 1 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(4x^4 - 15x^3 - 16x^2 + 69x + 18)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & & -8 & +46 & -60 & -18 \\
\hline
 & 4 & -23 & +30 & +9 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -2 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(4x^3 - 23x^2 + 30x + 9)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & & +12 & -33 & -9 \\
\hline
 & 4 & -11 & -3 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow 3 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot\underbrace{(4x^2 - 11x - 3)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(4x^2 - 11x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$4x^2 - 11x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \;\Rightarrow\; 4x^2 - 11x - 3 = 4(x-3)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

- Por tanto, $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot 4\cdot(x-3)\cdot\left(x + \frac{1}{4}\right) = 4x(x-1)(x+2)(x-3)^2\left(x + \frac{1}{4}\right)$

Solución

$P(x) = 4x(x-1)(x+2)(x-3)^2\left(x + \frac{1}{4}\right)$ Raíces $= \{0, 1, -2, 3\,(\text{doble}), -1/4\}$

t) $P(x) = x^6 + x^5 - 17x^4 - 50x^3 - 65x^2 - 47x - 15$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & +1 & -17 & -50 & -65 & -47 & -15 \\
-1 & & -1 & 0 & +17 & +33 & +32 & +15 \\
\hline
 & 1 & 0 & -17 & -33 & -32 & -15 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = (x+1)\cdot(x^5 - 17x^3 - 33x^2 - 32x - 15)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
-1 & & -1 & +1 & +16 & +17 & +15 \\
\hline
 & 1 & -1 & -16 & -17 & -15 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x^4 - x^3 - 16x^2 - 17x - 15)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & & -3 & +12 & +12 & +15 \\
\hline
 & 1 & -4 & -4 & -5 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -3 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = (x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(x^3 - 4x^2 - 4x - 5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
5 & & +5 & +5 & +5 \\
\hline
 & 1 & +1 & +1 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow 5 \text{ es raíz} \quad \text{y} \quad P(x) = (x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(x-5)\cdot\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar (x^2+x+1) resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución real} \Rightarrow (x^2+x+1) \text{ es irreducible}$$

Por tanto, $P(x)=(x+1)^2(x+3)(x-5)(x^2+x+1)$

Solución

$P(x)=(x+1)^2(x+3)(x-5)(x^2+x+1)$ Raíces $=\{-1\,(\text{doble}), -3, 5\}$

u) $P(x)=5x^7+30x^6+25x^5-120x^4-180x^3$

- Extraemos factor común $5x^3$: $P(x)=5x^3\cdot(x^4+6x^3+5x^2-24x-36)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $x^4+6x^3+5x^2-24x+36$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-36)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,\pm18,\pm36\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +6 & +5 & -24 & -36 \\
2 & & +2 & +16 & +42 & +36 \\ \hline
 & 1 & +8 & +21 & +18 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -12 & -18 & \\ \hline
 & 1 & +6 & +9 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow 2$ es raíz $\Rightarrow (x-2)$ es factor y $P(x)=5x^3\cdot(x-2)\cdot(x^3+8x^2+21x+18)$

$\Rightarrow -2$ es raíz $\Rightarrow (x+2)$ es factor y $P(x)=5x^3\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot\underbrace{(x^2+6x+9)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ (es una identidad notable)

- Por tanto, $P(x)=5x^3(x-2)(x+2)(x+3)^2$

Solución

$P(x)=5x^3(x-2)(x+2)(x+3)^2$ Raíces $=\{0\,(\text{triple}), 2, -2, -3\,(\text{doble})\}$

v) $P(x)=-2x^5+10x^4-12x^3-8x^2+16x$

- Extraemos factor común $-2x$: $P(x)=-2x\cdot(x^4-5x^3+6x^2+4x-8)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $x^4-5x^3+6x^2+4x-8$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-8)=\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & +6 & +4 & -8 \\
-1 & & -1 & +6 & -12 & +8 \\ \hline
 & 1 & -6 & +12 & -8 & \boxed{0} \\
2 & & +2 & -8 & +8 & \\ \hline
 & 1 & -4 & +4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz $\Rightarrow (x+1)$ es factor y $P(x)=-2x\cdot(x+1)\cdot(x^3-6x^2+12x-8)$

$\Rightarrow 2$ es raíz $\Rightarrow (x-2)$ es factor y $P(x)=-2x\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\underbrace{(x^2-4x+4)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ (es una identidad notable)

- Por tanto, $P(x)=-2x\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)^3=-2x(x+1)(x-2)^3$

Solución

$P(x)=-2x(x+1)(x-2)^3$ Raíces = { 0, − 1, − 2 (triple) }

Ejercicio 7

a) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)$ y $Q(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

m.c.d. $=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

m.c.m. $=(x-3)\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$

b) $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)$ y $Q(x)=(x-1)\cdot(x-2)^2$

m.c.d. $=x-1$

m.c.m. $=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)=x^4-3x^3-2x^2+12x-8$

c) $P(x)=6\cdot(x+3)^2\cdot(x+1)$ y $Q(x)=4\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

m.c.d. $=2(x+3)=2x+6$

m.c.m. $=12\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)^2=12x^4+72x^3+96x^2-72x-108$

d) $P(x)=x^4-x^2$ y $Q(x)=2x^3+10x^2-12x$

- En primer lugar debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$
  - ✓ $P(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)\Rightarrow \underline{P(x)=x^2(x-1)(x+1)}$
  - ✓ $Q(x)=2x^3+10x^2-12x=2x(x^2+5x-6)=2x(x-1)(x+6)\quad\Rightarrow \underline{Q(x)=2x(x-1)(x+6)}$

$$x^2+5x-6=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=\begin{cases}x=1\\x=-6\end{cases}\Rightarrow x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$$

- m.c.d. $=x\cdot(x-1)=x^2-x$

  m.c.m. $=2x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+6)=2x^5+12x^4-2x^3-12x^2$

e) $P(x)=x^5-16x$ y $Q(x)=3x^5-12x^4+12x^3$

- En primer lugar debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$

✓ $P(x)=x^5-16x=x(x^4-16)=x(x^2+4)(x^2-4)=x(x^2+4)(x+2)(x-2)$

$\Rightarrow \underline{P(x)=x(x^2+4)(x+2)(x-2)}$

✓ $Q(x)=3x^5-12x^4+12x^3=3x^3(x^2-4x+4)=3x^3(x-2)^2 \Rightarrow \underline{Q(x)=3x^3(x-2)^2}$

- m.c.d. $= x\cdot(x-2)=x^2-2x$

  m.c.m. $=3x^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)=3x^8-6x^7-48x^4+96x^3$

f) $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ y $Q(x)=x^3-5x^2+8x-4$

- En primer lugar debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$

$P(x)=x^3-x^2-4x+4$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(4)=\{\pm 1,\ \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & +4 \\ 1 & & +1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz $\Rightarrow$ $(x-1)$ es factor y $P(x)=(x-1)\cdot(x^2-4)$

$x^2-4=(x+2)(x-2)$ (es una identidad notable)

Luego, $\underline{P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)}$

$Q(x)=x^3-5x^2+8x-4$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-4)=\{\pm 1,\ \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & +8 & -4 \\ 1 & & +1 & -4 & +4 \\ \hline & 1 & -4 & +4 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz $\Rightarrow$ $(x-1)$ es factor y $Q(x)=(x-1)\cdot(x^2-4x+4)$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$ (es una identidad notable)

Luego, $\underline{Q(x)=(x-1)(x-2)^2}$

- m.c.d. $=(x-2)\cdot(x-1)=x^2-3x+2$

  m.c.m. $=(x-2)^2\cdot(x-1)\cdot(x+2)=x^4-3x^3-2x^2+12x-8$