SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: MÉTODO DE GAUSS

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos **sistemas** de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución, es decir, toda solución del primer sistema también lo es del segundo sistema y viceversa.
Dos sistemas equivalentes deben tener el mismo número de incógnitas pero no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Ejemplo

1) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} -x+4y=3 \\ 7x-5y=2 \end{cases}$ son equivalentes (solución $x=1 \quad y=1$)

2) $\begin{cases} -3x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+4y=3 \\ 2x+2y=0 \\ -x+9y=10 \end{cases}$ son equivalentes (solución $x=-1 \quad y=1$)

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA

1. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o de las incógnitas, el sistema que se obtiene es equivalente al primero.
2. Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número distinto de cero se obtiene otro sistema equivalente al primero.
3. Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo sistema se obtiene un sistema equivalente al primero.
4. Si en un sistema de ecuaciones lineales se suprime o se añade una ecuación que es combinación lineal (*) de otras ecuaciones del sistema, se obtiene otro sistema equivalente al dado. (Este criterio se obtiene combinando los criterios 2 y 3).

   (*)Si varias ecuaciones de un sistema se multiplican por números distintos de 0 y se suman se obtiene otra ecuación que es combinación lineal de las anteriores.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES SEGÚN SUS SOLUCIONES

$$\text{SISTEMA} \begin{cases} \text{INCOMPATIBLE (no tiene solución)} \rightarrow \text{S.I.} \\ \\ \text{COMPATIBLE (tiene solución)} \begin{cases} \text{DETERMINADO (una única solución)} \rightarrow \text{S.C.D.} \\ \text{INDETERMINADO (infinitas soluciones)} \rightarrow \text{S.C.I.} \end{cases} \end{cases}$$

METODO DE GAUSS

El **método de Gauss** para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en **transformar el sistema dado en otro equivalente y que esté escalonado o en forma triangular** (es decir, cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior).
Para conseguir esta triangulación del sistema se aplican los criterios de equivalencia de la siguiente forma:

1. Se fija una primera ecuación y se elimina una incógnita de todas las demás menos de la primera.
2. A continuación se mantienen invariables las dos primeras ecuaciones y se sustituyen las demás por las que resultan de eliminar una segunda incógnita.
3. El proceso se continúa hasta obtener un sistema en forma triangular cuya resolución es cómoda y fácil.

Para que nos sea más cómodo escalonar el sistema y obtener otro equivalente trabajaremos con su matriz asociada. (Una matriz de orden o dimensión $m \times n$ es un conjunto de $m \times n$ números distribuidos en m filas y n columnas)

Dado el sistema de m ecuaciones de ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}\ x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}\ x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Llamaremos matriz asociada al sistema a la matriz: $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots\ldots\ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots\ldots & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

(Para escalonar la matriz aplicaremos los criterios de equivalencia anteriores)

Una vez escalonado el sistema nos encontraremos con uno de los siguientes casos:

1) Si se obtiene una ecuación de la forma $0 = k$ con $k \neq 0 \Rightarrow$ S.I.
2) En caso contrario el Sistema es Compatible:
   2.1) Si hay tantas ecuaciones "válidas" como incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.
   2.2) Si hay menos ecuaciones "válidas" como incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

Ejemplos: Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 6x - y + 8z = 6 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$

Discusión

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^*=F_3 \quad F_2^*=F_1 \quad F_3^*=F_2]{\text{Ordenamos las filas de la matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^*=F_3+(-6)F_1]{F_2^*=F_2+(-5)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -22 & 2 \\ 0 & -7 & -22 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3^*=F_3+(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 4 \qquad \Rightarrow \text{ SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

$$\begin{array}{rrrrr} F_2 \rightarrow & 5 & -2 & 3 & 2 \\ -5F_1 \rightarrow & -5 & -5 & -25 & -0 \\ \hline & 0 & -7 & -22 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \rightarrow & 6 & -1 & 8 & 6 \\ -6F_1 \rightarrow & -6 & -6 & -30 & 0 \\ \hline & 0 & -7 & -22 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \rightarrow & 0 & -7 & -22 & 2 \\ -F_2 \rightarrow & 0 & -7 & -22 & 6 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

2. $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y+z=-4 \\ -x+3y-2z=6 \end{cases}$

Discusión

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^*=F_3+F_1]{F_2^*=F_2+(-2)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -14 \\ 0 & 4 & -3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=F_3+4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 9 & -45 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ S.C.D.}$$

$$\begin{array}{rrrrr} F_2 \to & 2 & 1 & 1 & -4 \\ -2F_1 \to & -2 & -2 & 2 & -10 \\ \hline & 0 & -1 & 3 & -14 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \to & 1 & 1 & -1 & 5 \\ F_1 \to & -1 & 3 & 1 & 6 \\ \hline & 0 & 4 & -3 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \to & 0 & 4 & -3 & 11 \\ 4F_2 \to & 0 & -4 & 12 & -56 \\ \hline & 0 & 0 & 9 & -45 \end{array}$$

Resolución

Una vez escalonado el sistema queda: $\left.\begin{array}{r} x+y-z=5 \\ -y+3z=-14 \\ 9z=-45 \end{array}\right\}$

- De la 3ª ecuación tenemos: $z=\dfrac{-45}{9} \Rightarrow \boxed{z=-5}$
- Sustituyendo en la 2ª ecuación tenemos: $-y+3\cdot(-5)=-14 \ \Rightarrow \ -y-15=-14 \ \Rightarrow \ \boxed{y=-1}$
- Sustituyendo en la 1ª ecuación tenemos: $x+(-1)-(-5)=5 \ \Rightarrow \ x-1+5=5 \ \Rightarrow \ \boxed{x=1}$

Sistema Compatible Determinado con solución $(1,-1,-5)$

3. $\begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+8z=6 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

Discusión

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^*=E_3 \quad F_2^*=E_1 \quad F_3^*=E_2]{\text{Ordenamos las filas de la matriz}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^*=F_3+(-5)F_1]{F_2^*=F_2+(-2)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3^*=F_3+(-2)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ S.C.I.}$$

$$\begin{array}{rrrrr} F_2 \to & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2F_1 \to & -2 & -2 & -4 & -4 \\ \hline & 0 & -3 & -1 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \to & 5 & -1 & 8 & 6 \\ -5F_1 \to & -5 & -5 & -10 & -10 \\ \hline & 0 & -6 & -2 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} F_3 \to & 0 & -6 & -2 & -4 \\ -2F_2 \to & 0 & 6 & 2 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolución

Tenemos que resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=2 \\ -3y-z=-2 \end{array}\right\}$

- Pasamos "z" con los términos independientes y la denominamos $\boxed{z=\lambda}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} x+y=2-2\lambda \\ -3y=-2+\lambda \end{array}\right\}$
- De la 2ª ecuación tenemos $3y=2-\lambda \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{2-\lambda}{3}}$
- Sustituyendo $y=\dfrac{2-\lambda}{3}$ en la 1ª ecuación tenemos:

$$x+\frac{2-\lambda}{3}=2-2\lambda \Rightarrow x=2-2\lambda-\frac{2-\lambda}{3} \Rightarrow x=\frac{6-6\lambda-2+\lambda}{3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{4-5\lambda}{3}}$$

Sistema Compatible Indeterminado con solución $\left(\dfrac{4-5\lambda}{3},\dfrac{2-\lambda}{3},\lambda\right)$ con $\lambda\in\Re$