RADICALES

1. DEFINICIÓN

Sea a un número real cualquiera y n un número natural mayor o igual que 2. Se define **la raíz énesima de *a*** como:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$\sqrt{\ }$ = signo radical
n = índice (cuando es 2 no se escribe)
a = radicando

Ejemplo

a) $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

c) $\sqrt{-16} = \nexists$ (no existe)

d) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ porque $(-3)^4 = 81$ y $3^4 = 81$

Distinguiremos los siguientes casos:

I) El índice (n) es un número par

- Si $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \pm b$, es decir, "$a$" tiene dos raíces reales de valores opuestos.
- Si $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{0} = 0$
- Si $a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}$ no existe ya que toda potencia de exponente par es un número positivo

II) El índice (n) es un número impar

Entonces $\sqrt[n]{a}$ existe para todo $a \in \Re$, es única y tiene el mismo signo que "a".

2. EXPRESIÓN DE RADICALES EN FORMA DE POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}}$ c) $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt[7]{2^4} = 2^{\frac{4}{7}}$

3. PROPIEDADES DE LOS RADICALES

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$ Ejemplo $\sqrt[3]{5^3} = 5$	2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ Ejemplo $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{5} = \sqrt[8]{10}$	3) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ Ejemplo $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2}$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ Ejemplo $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$	5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ Ejemplo $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[15]{6}$	6) $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n\cdot m]{a^{k\cdot m}}$ Ejemplo $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 5]{2^{1\cdot 5}} = \sqrt[15]{2^5}$

4. RADICALES EQUIVALENTES

Para obtener radicales equivalentes a uno dado se multiplica el índice y el exponente del radicando por un mismo número distinto de cero (propiedad 6).

Ejemplo: $\sqrt[5]{2^2} = \sqrt[10]{2^4} = \sqrt[20]{2^8} = \ldots$

5. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar un radical se divide el índice del radical y el exponente del radicando por un divisor común. Cuando un radical no se puede simplificar diremos que es un radical irreducible.

Ejemplo

a) $\sqrt[12]{3^4} \underset{(:2)}{=} \sqrt[6]{3^2} \underset{(:2)}{=} \sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[15]{64} = \sqrt[15]{2^6} \underset{(:3)}{=} \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$ c) $\sqrt[12]{a^8 \cdot b^4} \underset{(:4)}{=} \sqrt[6]{a^2 \cdot b}$

6. REDUCCIÓN DE RADICALES A ÍNDICE COMÚN

Consiste en obtener radicales equivalentes a los dados que tengan todos ellos el mismo índice. Se toma como "índice común" el m.c.m. de los índices.

Ejemplo

$$\sqrt{2a} \quad \sqrt[4]{a^3} \quad \sqrt[3]{3a^5} \xrightarrow{\text{m.c.m.}(2,4,3)=12} \sqrt[12]{2^6a^6} \quad \sqrt[12]{a^{3\cdot 3}} \quad \sqrt[12]{3^4a^{5\cdot 4}} \longrightarrow \sqrt[12]{64a^6} \quad \sqrt[12]{a^9} \quad \sqrt[12]{81a^{20}}$$

7. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL

Utilizaremos las propiedades de los radicales

Ejemplo

a) $\sqrt{8000} = \sqrt{2^6 \cdot 5^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 40\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{32}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{1} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[3]{2^{48} \cdot 3^{85} \cdot 7^{99}} \rightarrow$ los exponentes son demasiado grandes, ¿cómo proceder en estos casos?

EN LA PRÁCTICA

1) Se descompone el radicando en producto de factores primos.
2) Podemos extraer factores del radical si el exponente del factor es $\geq$ que el índice del radical.
3) Se divide el exponente entre el índice. El cociente de esta división es el exponente del factor que sale fuera y el resto el exponente del factor que queda dentro.

$$\begin{array}{r|l} \text{Exponente} & \text{Índice} \\ \cline{2-2} \text{resto} & \text{cociente} \end{array}$$

Dentro → resto; cociente ← Fuera

Ejemplo

a) $\sqrt[3]{384} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3} = 4\sqrt[3]{6}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{128}{15625}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^7}{5^6}} = \dfrac{2^2}{5^2}\sqrt[3]{\dfrac{2}{1}} = \dfrac{4}{25}\sqrt[3]{2}$

8. INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UN RADICAL

Utilizaremos las propiedades de los radicales.

Ejemplo

a) $2\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$

b) $a^3b\ \sqrt{ab}=\sqrt{(a^3)^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{a^6\cdot b^2\cdot a\cdot b}=\sqrt{a^7\cdot b^3}$

EN LA PRÁCTICA: Para introducir un factor dentro del radical se eleva dicho factor al índice.

Ejemplo

a) $2\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{24}$

b) $2^3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{(2^3)^2\cdot 5}=\sqrt{2^6\cdot 5}=\sqrt{320}$

9. OPERACIONES CON RADICALES

9.1. SUMA Y RESTA

Para poder sumar (restar) radicales tienen que ser semejantes, es decir, con el mismo índice y el mismo radicando.

A) $3\sqrt{2}+9\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(3+9-5)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\rightarrow$ no son radicales semejantes $\Rightarrow$ no podemos efectuar la operación, se deja indicado.

Para sumar o restar radicales procedemos de la siguiente manera:

I) Si son semejantes se opera como en A)

II) Si no son semejantes:

1) Se descomponen los números que aparecen en el radicando en producto de factores primos.
2) Se extraen factores del radical
3) Si los radicales son semejantes se opera como en A); si no son semejantes, se deja la operación indicada como en B)

Ejemplo

a) $3\sqrt{5}+9\sqrt{5}-11\sqrt{5}+6\sqrt{5}=7\sqrt{5}$ (como son semejantes operamos directamente; $3+9-11+6=7$)

b) $2\sqrt{12}-\sqrt{27}+5\sqrt{75}\underset{(1)}{=}2\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+5\sqrt{3\cdot 5^2}\underset{(2)}{=}2\cdot 2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+5\cdot 5\sqrt{3}\underset{(3)}{=}4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+25\sqrt{3}=26\sqrt{3}$

(1) Descomponemos en factores primos los radicandos (2) Extraemos factores (3) Operamos

9.2. PRODUCTO DE RADICALES

I) Radicales con el mismo índice

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

Ejemplo

$\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{36}\underset{(1)}{=}\sqrt[3]{2\cdot 3^2}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}\underset{(2)}{=}\sqrt[3]{2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\underset{(3)}{=}\sqrt[3]{2^3\cdot 3^4}\underset{(4)}{=}2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}=6\sqrt[3]{3}$

(1) Descomponemos en factores primos los radicandos
(2) Operamos
(3) Reducimos aplicando propiedades de las potencias
(4) Extraemos factores

II) Radicales con distinto índice

1) Se reducen los radicales a índice común (si es necesario se factorizan previamente los radicandos)
2) Se opera como en el caso I)

Ejemplo

$$\sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{4}\underset{(1)}{=}\sqrt{2^5}\cdot\sqrt[3]{2^2}\underset{(2)}{=}\sqrt[6]{2^{15}}\cdot\sqrt[6]{2^4}\underset{(3)}{=}\sqrt[6]{2^{19}}\underset{(4)}{=}2^3\cdot\sqrt[6]{2}=8\sqrt[6]{2}$$

(1) Factorizamos los radicandos (2) Reducimos a índice común (3) Operamos (4) Extraemos factores

9.3. COCIENTE DE RADICALES

I) Radicales con el mismo índice

$$\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}}$$

Ejemplo $\sqrt{24}:\sqrt{3}=\sqrt{24:3}=\sqrt{8}$

II) Radicales con distinto índice

1) Se reducen los radicales a índice común (si es necesario se factorizan previamente los radicandos)
2) Se opera como en el caso I)

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{108x}}{\sqrt[6]{12x^3}}\underset{(1)}{=}\frac{\sqrt{2^2\cdot 3^3\cdot x}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 3\cdot x^3}}\underset{(2)}{=}\frac{\sqrt[6]{2^6\cdot 3^9\cdot x^3}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 3\cdot x^3}}\underset{(3)}{=}\sqrt[6]{2^4\cdot 3^8}\underset{(4)}{=}\sqrt[3]{2^2\cdot 3^4}\underset{(5)}{=}3\sqrt[3]{2^2}=3\sqrt[3]{4}$$

(1) Factorizamos los radicandos (2) Reducimos a índice común (3) Operamos (4) Simplificamos (5) Extraemos factores

10. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

A) El denominador es un monomio con un radical cuadrático $\rightarrow \dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por el radical que aparece en el denominador y se opera.

$$\frac{6\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\left(6\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{6}+\sqrt{2^2}}{3\cdot\sqrt{2^2}}=\frac{6\sqrt{6}+2}{3\cdot 2}=\frac{6\sqrt{6}+2}{6}\underset{(:2)}{=}\frac{3\sqrt{6}+1}{3}$$

B) El denominador es un binomio con radicales cuadráticos $\rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por el conjugado del denominador y se opera. El <u>conjugado</u> de $(A+B)$ es $(A-B)$ y viceversa.

$$\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+1}=\frac{3\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-1\right)}=\frac{6\sqrt{18}-3\sqrt{6}}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{6\sqrt{2\cdot 3^2}-3\sqrt{6}}{4\cdot 3-1}=\frac{6\cdot 3\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{12-1}=\frac{18\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{11}$$

C) El denominador es un monomio con un radical énesimo $\rightarrow \dfrac{a}{b\cdot\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica en el numerador y en el denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$ y se opera.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6^2}}=\frac{3\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6^3}}=\frac{3\sqrt[3]{36}}{6}=\frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$