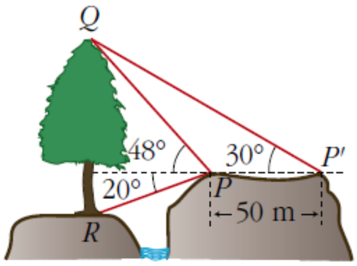
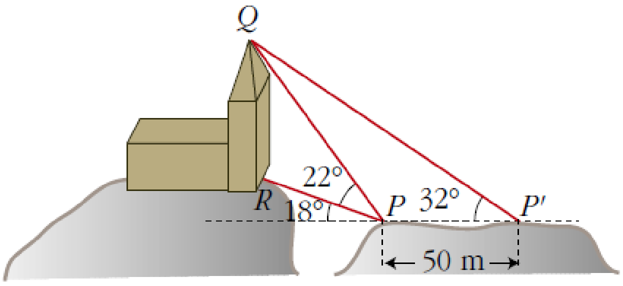
1. Responde a las siguientes cuestiones:
   a) Calcula el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte, sabiendo que una estatua proyecta una sombra que mide cuatro veces su altura.
   b) Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?
   c) Se sabe que, desde un punto del suelo, situado a una cierta distancia de una estatua, se ve el extremo de ésta con un ángulo de elevación de 35º. ¿Cuál será el ángulo de elevación desde una distancia triple?
2. Para hallar el ancho de un rio procedemos así: Nos situamos en un punto A, en una orilla del rio, y medimos el ángulo (55º) bajo el cual se ve un árbol que está frente a nosotros, en la otra orilla. Nos alejamos 20 m de la orilla en dirección perpendicular a ella y volvemos a medir el ángulo bajo el cual se ve el árbol (28º). ¿Cuánto mide el ancho del rio?
3. Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 30° y 45° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura vuela el avión? ¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentra el avión?
4. Desde el lugar donde se encuentra Elena, puede observar una torre con un ángulo de elevación de 40º. Si Elena avanza 40 metros en dirección a la torre, la observa con un ángulo de 68º. Calcula la altura de la torre si la estatura de Elena es de 1,65 metros. ¿A qué distancia de la torre estaba Elena inicialmente?
5. Una estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del pedestal.
6. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 50° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.
7. Desde dos puntos distantes entre sí 3 Km. se observa un globo sonda. El ángulo de elevación desde uno de los puntos de observación (A) es 30º y desde el otro (B) 45º. ¿Cuál es la altura del globo?
8. El ángulo de elevación del sol sobre el horizontal es de 48º. Calcula la longitud de la sombra que proyectará una estaca clavada verticalmente en el suelo si su longitud es de 1,3 m. ¿Cuál sería la longitud de la sombra de la estaca si ésta estuviera inclinada 5º respecto de la vertical?
9. Desde un cierto punto se observa la copa de un árbol bajo un ángulo de 45º. Desde el mismo punto y a una altura de 2 m se observa la copa del mismo árbol bajo un ángulo de 30º. Calcula la altura del árbol y a qué distancia nos encontramos de él.
10. Una persona divisa el punto más alto de una torre desde determinado punto del camino bajo un ángulo de elevación de 60º. Alejándose 100 m y subiendo un escalón vertical de 1 m de altura divisa el mismo punto bajo un ángulo de elevación de sólo 45º. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿A qué distancia del pie de la torre se encuentra dicha persona en cada una de las observaciones?
11. Desde el mástil de un barco, situado a 24 m sobre el nivel del mar, un marinero observa que el ángulo de elevación hasta el extremo superior de un faro es de 30º y que el ángulo de depresión hasta la base del mismo es de 45º. Calcular la altura del extremo superior del faro sobre el nivel del mar.
12. Una escalera está apoyada sobre la pared formando un ángulo sobre la horizontal de 47º. Si la apoyamos un metro más cerca de la pared, el ángulo que forma con la horizontal es de 64º. ¿Cuál es la longitud de la escalera
13. Una rampa de 40 m de longitud y 10º de inclinación conduce al pie de una estatua. Calcula la altura de ésta sabiendo que, en el inicio de la rampa, el ángulo de elevación del punto más alto de la estatua es de 15º.
14. Carlos y Yago salen con sus motos a la vez de un cruce de carreteras que forman un ángulo de 55º. Carlos circula a 80 km/h, y Yago lo hace a 90 km/h. ¿Qué distancia les separará al cabo de media hora?
15. En las dos vertientes de una montaña hay sendas estaciones de esquí, A y B. Desde un valle cercano C, un esquiador divisa ambas estaciones. Las distancias desde su posición hasta ellas son de 300 m y 520 m respectivamente y ∡ACB = 43º ¿Qué distancia separa las dos estaciones?
16. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: ∡BAC = 46° y BCA ∡= 53°. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?
17. Para localizar una emisora clandestina dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

18. Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.

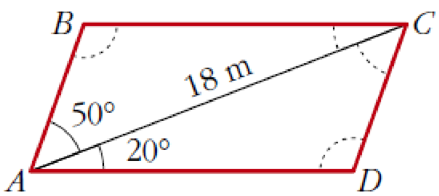


19. Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.



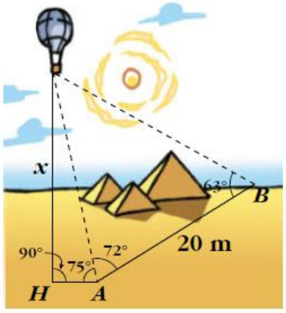
20. En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?
21. Desde un punto P exterior a una circunferencia de 10 cm de radio, se trazan las tangentes a dicha circunferencia que forman entre sí un ángulo de 40°. Calcula la distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia.
22. Las rectas tangentes a una circunferencia de 50π m de longitud, trazadas desde un punto exterior a ella, forman un ángulo de 45º. Calcular la distancia de este punto al centro de la circunferencia.
23. Un golfista golpea la pelota de modo que su lanzamiento alcanza una longitud de 129 m. Si la distancia del golfista al hoyo es de 150 m y la pelota queda a una distancia de 40 m del hoyo, calcula el ángulo que forma la línea de unión del golfista con el hoyo y la dirección del lanzamiento.
24. Dos observadores, situados en la costa y separados 1000 m, observan una plataforma petrolífera y quieren determinar a qué distancia de tierra se encuentra. Los observadores dirigen visuales desde sus posiciones a la plataforma y miden el ángulo que forman estas visuales con la línea imaginaria que los une. Estos ángulos son 63º y 83º. Calcula la distancia que separa la plataforma de la costa.
25. Dos de los lados de un paralelogramo miden 6 y 8 centímetros, respectivamente, y forman un ángulo de 32º. ¿Cuánto miden sus diagonales?
26. Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75º. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.
27. Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:

    Nota: ∡BAC = ∡ACD = 50 °. Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.

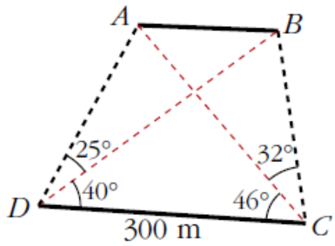


28. Desde un determinado punto del suelo una persona observa el extremo superior de un edificio bajo un ángulo de elevación de 70º. Desplazándose 100 m en dirección sur el ángulo de elevación es ahora de 50º. ¿Qué altura tiene el edificio?

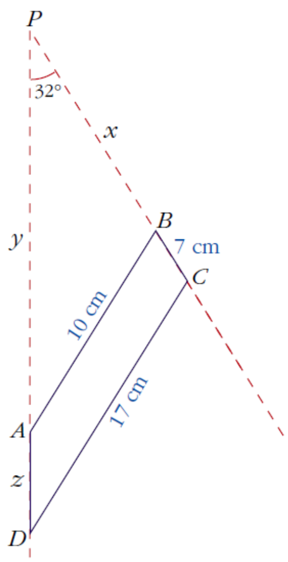
29. Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



30. Para hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B, fijamos dos puntos C y D tales que CD =300m, y medimos los siguientes ángulos: ∡ADB = 25° ∡BDC= 40° ∡ACD= 46° ∡ACB = 32° Calcula AB.



31. Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm, y uno de sus lados, 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32°. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.



32. Si $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ y $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

33. Si $\text{tg}\,\alpha = 3$ y $180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$ calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

34. Si $\text{cosec}\,\alpha = \sqrt{5}$ y $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

35. Si $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$ y $180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

36. Si $\sec\alpha = \sqrt{7}$ y $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

37. Si $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ y $270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

38. Si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\cos\alpha < 0$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.
39. Si $\operatorname{cosec}\alpha = 3$ y $\operatorname{tg}\alpha < 0$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.
40. Si $\sec\alpha = -\sqrt{5}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.
41. Si $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.
42. Si $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula las demás razones trigonométricas de α. Halla el valor de α.

43. Halla, sin utilizar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 150º	b) $\frac{3\pi}{4}$ radianes	c) 120º	d) $\frac{7\pi}{6}$ radianes	e) 225º
f) 240º	g) $\frac{7\pi}{4}$ radianes	h) 300º	i) $\frac{11\pi}{6}$ radianes	j) 1200º
k) 1395º	l) 2760º	m) $\frac{43\pi}{6}$ radianes	n) 1380º	o) – 60º
p) – 120º	q) $-\frac{5\pi}{4}$ radianes	r) – 495º	s) –1920º	t) $-\frac{55\pi}{6}$ radianes

44. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) Las demás R.T. de α	b) $\cos(180º-\alpha)$	c) $\sec(180º+\alpha)$	d) $\operatorname{cosec}(90º-\alpha)$
e) $\operatorname{cotg}(90º+\alpha)$	f) $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	g) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	h) $\operatorname{cotg}(-\alpha)$
i) $\sec(-\alpha)$	j) $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$	k) $\operatorname{tg}(360º-\alpha)$	l) $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
m) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	n) $\operatorname{cosec}(180º-\alpha)$	o) $\sec(270º+\alpha)$	p) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

45. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) Las demás R.T. de α	b) $\operatorname{sen}(180º-\alpha)$	c) $\cos(180º+\alpha)$	d) $\sec(90º-\alpha)$
e) $\operatorname{tg}(90º+\alpha)$	f) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	g) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	h) $\operatorname{cosec}(-\alpha)$
i) $\operatorname{cotg}(-\alpha)$	j) $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$	k) $\sec(360º-\alpha)$	l) $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
m) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	n) $\sec(180º-\alpha)$	o) $\operatorname{cosec}(270º+\alpha)$	p) $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

46. Simplifica las expresiones trigonométricas siguientes:

a) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)}$	b) $(2-\operatorname{cosec}^2\alpha):\dfrac{(\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha}$
c) $\dfrac{\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}$	d) $\dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi-\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)}$
e) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{cotg}(\pi-\alpha)\cdot tg(\pi-\alpha)}$	f) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1-\cos^2\alpha}-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$
g) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\cos\alpha$	h) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)}$

47. Demuestra, de forma razonada, las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cotg}^2\alpha=1$	b) $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$
c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$	d) $\operatorname{cotg}^2\alpha=\cos^2\alpha+(\operatorname{cotg}\alpha\cdot\cos\alpha)^2$
e) $\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha$	f) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}=1-\operatorname{sen}\alpha$
g) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha}=\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$	h) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}=\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$
i) $\dfrac{1+\sec\alpha}{1-\sec\alpha}=\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$	j) $2\operatorname{sen}^2\alpha-1=\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha$
k) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\operatorname{cotg}\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{sen}\alpha$	l) $\dfrac{\sec^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$
m) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha$	n) $(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha$
o) $\operatorname{cotg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\operatorname{cotg}^2\alpha=-\cos^2\alpha$	p) $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$
q) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{cotg}\alpha)=\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$	r) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha$
s) $\dfrac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha$	t) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$

48. Halla las razones trigonométricas de los ángulos de 15º, 75º, 105º y 245º, 7º 30´ sin utilizar la calculadora.

49. Comprueba que se verifican las igualdades:

a) $\operatorname{sen}44^\circ-\operatorname{sen}22^\circ=-2\cos147^\circ\cdot\operatorname{sen}11^\circ$

b) $\cos70^\circ-\cos50^\circ=2\operatorname{sen}300^\circ\cdot\operatorname{sen}10^\circ$

c) $\operatorname{sen}75^\circ-\cos75^\circ=2\cos45^\circ\cdot\operatorname{sen}30^\circ$

50. Calcula:

a) $\dfrac{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ}$	b) $\dfrac{\text{sen } 70^\circ + \text{sen } 50^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 50^\circ}$	c) $\dfrac{\text{sen } 100^\circ + \text{sen } 40^\circ}{\cos 100^\circ - \cos 40^\circ}$	d) $\dfrac{\text{sen } 40^\circ + \text{sen } 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}$
e) $\dfrac{\text{sen } 110^\circ + \text{sen } 50^\circ}{\cos 110^\circ - \cos 50^\circ}$	f) $\cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$	g) $\text{sen } 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$	h) $\cos(52^\circ 30') \cdot \cos(7^\circ 30')$

51. Demuestra, de forma razonada, las siguientes igualdades:

a) $\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$	b) $\dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{\text{sen } (a+b)+\text{sen } (a-b)} = -\text{tg } b$	c) $\dfrac{\cos a + \dfrac{(\cos\ 3a)}{3}}{\text{sen } a - \dfrac{(\text{sen } 3a)}{3}} = \dfrac{1}{\text{tg}^3 a}$
d) $\dfrac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \dfrac{2}{1-\text{tg}^2 x}$	e) $\text{tg } x + \text{cotg } x = \dfrac{2}{\text{sen} 2x}$	f) $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$
g) $\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)} = \text{tg } b$	h) $\dfrac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}(a-b)} = \dfrac{\text{tg } a \cdot \text{cotg } b + 1}{\text{tg } a \cdot \text{cotg } b - 1}$	i) $\text{cotg}^2 x - \text{tg}^2 x = 4 \cdot \text{cotg} 2x \cdot \text{cosec} 2x$
j) $\text{sen}(a+b)\cdot\text{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$	k) $\sec(x-y) = \dfrac{\sec x \cdot \sec y \cdot \text{cosec } x \cdot \text{cosec } y}{\text{cosec } x \cdot \text{cosec } y + \sec x \cdot \sec y}$	
l) $\dfrac{2\text{sen } x}{\text{tg} 2x} = \cos x - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$	m) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right) - \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right) = 2\text{tg} 2a$	

52. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{2}(\cos a + \cos b)^2 + \dfrac{1}{2}(\text{sen } a + \text{sen } b)^2 - \cos(a-b)$	b) $\dfrac{(\text{sen } a + \cos a)\cdot(\text{sen } b + \cos b)}{\cos(a-b) + \text{sen } (a+b)}$
c) $\dfrac{2\text{sen } a}{1-\cos a} \cdot \dfrac{1+\cos a}{\cos a}$	d) $\dfrac{\cos 8a + \cos 2a + \cos 5a}{\text{sen } 5a}$
e) $\dfrac{\text{sen } a + \text{sen } 5a + \text{sen } 3a}{\cos a + \cos 5a + \cos 3a}$	f) $\dfrac{\cos^2 3x \cdot \text{sen } 4x + \text{sen } 4x \cdot \text{sen}^2 3x}{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x - \cos 4x}$
g) $\text{sen } a \cdot \text{sen } (b-c) + \text{sen } b \cdot \text{sen } (c-a) + \text{sen } c \cdot \text{sen } (a-b)$	

53. Si $\cos a = \dfrac{3}{5}$ con $\dfrac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ y $\text{tg } b = -\dfrac{4}{3}$ con $\dfrac{\pi}{2} < b < \pi$, calcula:

a) Las restantes razones trigonométricas de a	b) Las restantes razones trigonométricas de b			
c) $\cos (a+b)$	d) $\text{sen } (a-b)$	e) $\text{tg } (a-b)$	f) $\text{tg } 2a$	g) $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)$
h) $\text{sen}\left(\dfrac{b}{2}\right)$	i) $\text{tg}\left(\dfrac{b}{2}\right)$	j) $\text{sen } (2a+2b)$	k) $\cos\left(\dfrac{a}{2}+90^\circ\right)$	l) $\text{tg}\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)$
m) $\text{tg } (180^\circ - b)$	n) $\text{cosec }\left(\dfrac{3\pi}{2}+b\right)$	o) $\text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-a\right)$	p) $\text{sen}\left(\dfrac{a}{2}-2b\right)$	q) tg 3a

54. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{1+\cos a}{\cos a}$	b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{\text{sen } 2a}{\cos a}$	c) $\text{sen}^4 x-\cos^4 x$
d) $\dfrac{\text{sen}(a+\pi)\cdot\text{tg}\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\text{cotg}(\pi-a)}$	e) $\dfrac{\text{sen}2a+\text{sen}4a}{\cos 2a-\cos 4a}$	f) $\dfrac{\left(\text{sen}\dfrac{a}{2}-\cos\dfrac{a}{2}\right)^2(1+\text{sen}a)}{\text{sen}2a}$
g) $\dfrac{\text{sen } x+\text{sen}3x+\text{sen}5x+\text{sen}7x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}$	h) $\dfrac{\text{sen } a+\text{sen } b}{\text{sen } a-\text{sen } b}\cdot\dfrac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b}$	

55. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1) $\text{sen } x=-\dfrac{1}{2}$	2) $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	3) $\sec x=-\dfrac{1}{2}$
4) $\text{tg } x=-\sqrt{3}$	5) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	6) $\text{sen } 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
7) $\cos 3x=\dfrac{1}{2}$	8) $\text{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)=1$	9) $\text{tg } 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
10) $\text{sen } 3x=-\dfrac{1}{2}$	11) $2\text{sen } x\cos x=\cos x$	12) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x=\text{sen } x$
13) $\text{sen}^2 x-\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$	14) $\text{sen } x+\cos^2 x=\dfrac{5}{4}$	15) $\text{tg } x=2\text{sen } x$
16) $\cos^2 x-3\,\text{sen}^2 x=0$	17) $\text{tg}^2 x-3\,\text{tg } x+2=0$	18) $\text{tg } x\cdot\sec x=\sqrt{2}$
19) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x=1+4\,\text{sen } x$	20) $\cos(4x-\pi)=-\dfrac{1}{2}$	
21) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x+5\cos x+3=-1$	22) $\text{sen } x-\dfrac{1}{\text{sen } x}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	
23) $\text{sen } x+2=3\cos^2 x+\text{sen}^2 x$	24) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x+5\cos x+3=0$	
25) $2\,\text{sen}^4 x-7\cos^2 x+3=0$	26) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x+\text{sen } x=0$	
27) $2\cdot\text{sen } x\cdot\cos x=\text{tg } x$	28) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x+\cos x=0$	

56. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1) $\text{sen } 2x=\cos x$	2) $\text{sen } x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$	3) $\cos 2x=\text{sen } x$
4) $\cos 2x=1+4\text{sen } x$	5) $\text{sen } 6x+\text{sen } 2x=2\text{ sen } 4x$	6) $\text{sen } 8x+\text{sen } 2x=0$
7) $\cos 3x-\cos 4x=0$	8) $\cos 2x+\cos x=\text{sen } x+\text{sen } 2x$	9) $\text{sen } 9x+\text{sen } 5x+2\text{ sen}^2 x=1$
10) $\cos 2x+5\cos x+3=1$	11) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$	12) $\text{sen } x+2=3\cos 2x$
13) $1=\dfrac{\text{sen } 2x}{2}+\cos^2 x$	14) $\cos 2x+5\cos x+3=0$	15) $2\text{ sen}^4 x-7\cos^2 x+3=0$
16) $\text{sen } x-\cos x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	17) $\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2}+\cos^2 x=1$	18) $6\cos^2 x+\cos 2x=5$

19) $\cos 2x + \text{sen}\, x = 0$	20) $\text{sen}\ 2x = \text{tg}\ x$	21) $\cos 2x + \cos\ x = 0$
22) $\text{sen}\ x + \text{sen}\ 2x + \text{sen}\ 3x = 0$	23) $\text{sen}\ x + \cos\ x = \sqrt{2}$	24) $\text{sen}^4 x - 2\cos^4 x + 1 = 0$
25) $4\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos x = 3$	26) $4 \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$	27) $8\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \sec x$
28) $\text{tg}2x = -\text{tg}\ x$	29) $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen}5x + \text{sen}3x$	30) $\text{sen}\ x + \cos x = \cos x \cdot (\text{sen}\ x + \cos x)$
31) $\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)^2 = \text{sen}2x$	32) $\text{sen}2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	

57. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\begin{cases} \text{sen}\ x + \text{sen}\ y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \text{sen}\ x - \text{sen}\ y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$	b) $\begin{cases} \text{sen}\ x - \text{sen}\ y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2\text{sen}\ x = 1 - \cos y \\ 2\cos x = 1 + \cos y \end{cases}$	d) $\begin{cases} \text{sen}\ x + \text{sen}\ y = \sqrt{3} \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \text{sen}\ x + \text{sen}\ y = \frac{3}{2} \\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	f) $\begin{cases} \text{sen}\ (x+y) - \cos x \cos y = 0 \\ \text{sen}\ y = 0 \end{cases}$	g) $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \text{sen}\ x - \text{sen}\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$