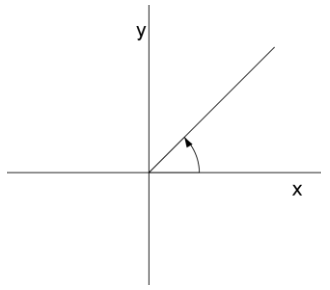
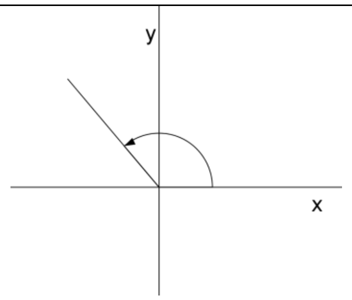
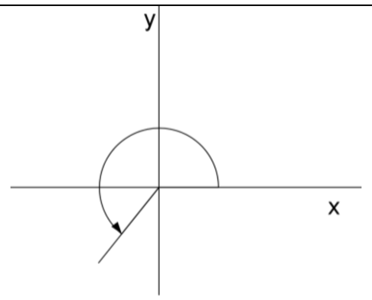
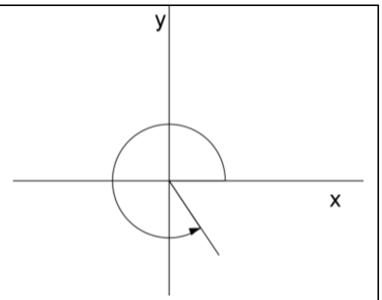
MEDIDA DE ÁNGULOS

- Sistemas de medida de ángulos $\begin{cases} \text{Sistema sexagesimal: Ángulo completo} = 360^\circ \quad 1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \\ \text{Radianes: El radián es el valor del ángulo central que abarca una longitud} \\ \qquad\qquad \text{de arco igual al radio} \end{cases}$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \qquad 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

REPRESENTACIÓN DE ÁNGULOS. REDUCCIÓN AL PRIMER GIRO

- Para representar geométricamente un ángulo se sitúa sobre unos ejes cartesianos y se toma como semirrecta origen el semieje positivo de abscisas.
- Sentido positivo $\rightarrow$ sentido contrario a las agujas del reloj

			
Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante

- Para representar un ángulo mayor de 360º se le restan tantas vueltas completas como sea posible, asociándole de este modo un ángulo comprendido entre 0º y 360º

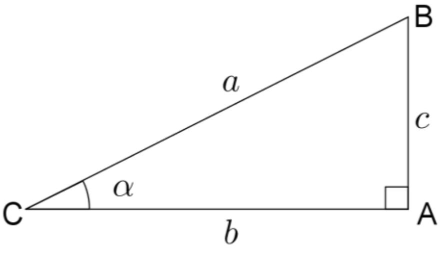
Ejemplo: Calcular la reducción al primer giro de un ángulo de 1940º

$$\begin{array}{r|l} 1940^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 140^\circ & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1940^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 140^\circ$$

1940º tiene 5 vueltas completas más 140º, es decir, el ángulo equivalente en el primer giro a 1940º es 140º

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

- **Seno del ángulo α** $\rightarrow$ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
- **Coseno del ángulo α** $\rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
- **Tangente del ángulo α** $\rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$
- **Cosecante del ángulo α** $\rightarrow$ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
- **Secante del ángulo α** $\rightarrow$ $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- **Cotangente del ángulo α** $\rightarrow$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30º, 45º y 60º

	$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad	$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad	$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec α	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

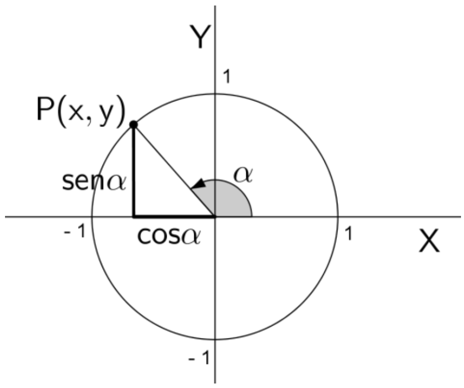
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Circunferencia goniométrica = circunferencia de radio 1

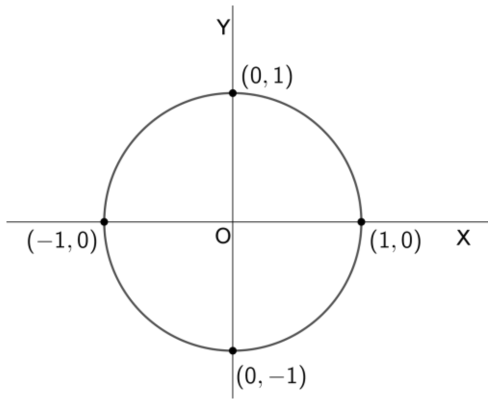
$$P(x, y) \longrightarrow \alpha$$

$$\cos\alpha = x$$

$$\operatorname{sen}\alpha = y$$

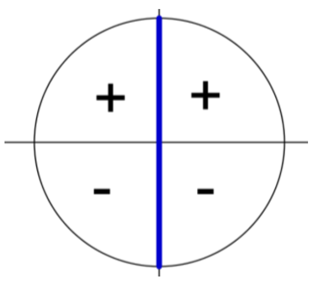


	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
sen α	0	1	0	– 1	0
cos α	1	0	– 1	0	1
tg α	0	No definida	0	No definida	0

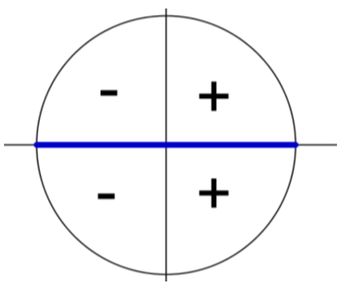


SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

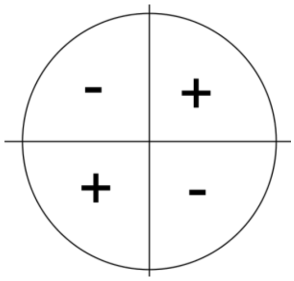
sen α / cosec α



cos α / sec α



tg α / cotg α

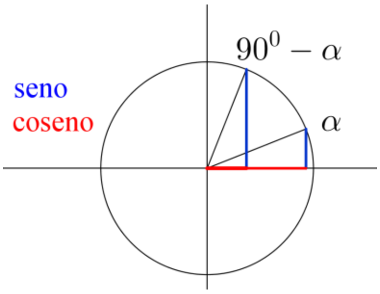


REDUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS AL PRIMER CUADRANTE

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo se pueden relacionar con las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante. Es decir, podemos calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo conociendo solo las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante.

Primer cuadrante

ÁNGULOS COMPLETENTARIOS



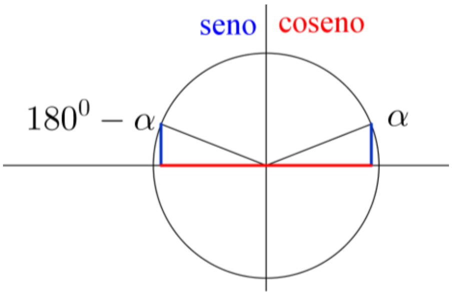
$\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha) = \sec\alpha$

$\cos(90^\circ-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\sec(90^\circ-\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(90^\circ-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Segundo cuadrante

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

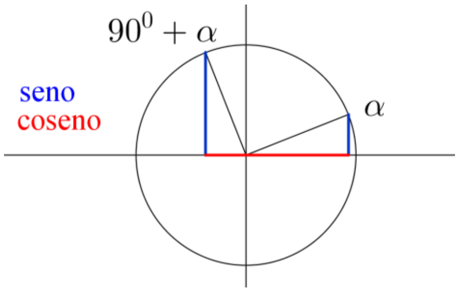


$\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$

$\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sec(180^\circ-\alpha) = -\sec\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 90º



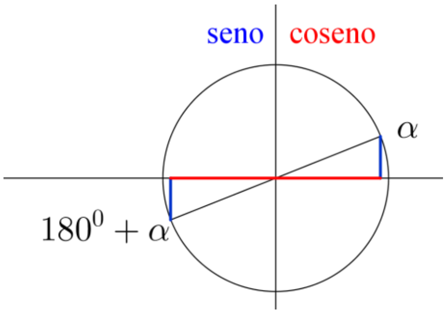
$\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha) = \sec\alpha$

$\cos(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\sec(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Tercer cuadrante

ÁNGULOS QUE DIFIEREN 180º

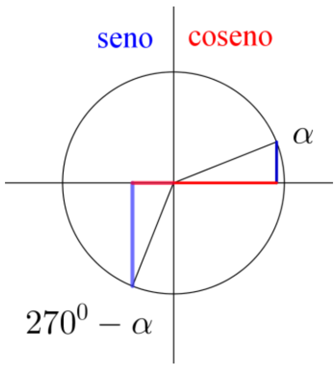


$\operatorname{sen}(180^\circ+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(180^\circ+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sec(180^\circ+\alpha) = -\sec\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(180^\circ+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

ÁNGULOS QUE SUMAN 270º



$\operatorname{sen}(270^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(270^\circ-\alpha) = -\sec\alpha$

$\cos(270^\circ-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\sec(270^\circ-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$ $\quad$ $\operatorname{cotg}(270^\circ-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

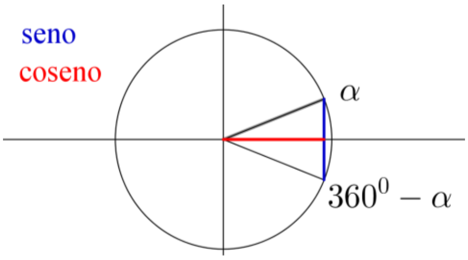
Cuarto cuadrante

ÁNGULOS QUE SUMAN UN ÁNGULO COMPELTO (= ÁNGULOS OPUESTOS)

$\operatorname{sen}(360^{o}-\alpha)=\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}(360^{o}-\alpha)=\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha$

$\cos(360^{o}-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\sec(360^{o}-\alpha)=\sec(-\alpha)=\sec\alpha$

$\operatorname{tg}(360^{o}-\alpha)=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(360^{o}-\alpha)=\operatorname{cotg}(-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$

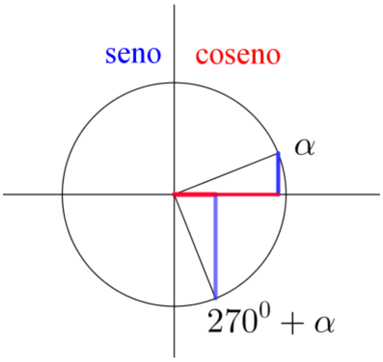


ÁNGULOS QUE DIFIEREN 270º

$\operatorname{sen}(270^{o}+\alpha)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}(270^{o}+\alpha)=-\sec\alpha$

$\cos(270^{o}+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\sec(270^{o}+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$

$\operatorname{tg}(270^{o}+\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(270^{o}+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$



Si un ángulo es mayor de 360ª lo reducimos al primer giro y se convierte en uno de los casos anteriores.

PROPIEDADES Y RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para cualquier ángulo α se verifica:

<table>
<tr><td colspan="4">1) $-1\le\operatorname{sen}\alpha\le1$ $\qquad$ $-1\le\cos\alpha\le1$ $\qquad$ $-\infty\le\operatorname{tg}\alpha\le+\infty$
$\operatorname{cosec}\alpha\in\mathbb{R}-(-1,1)$ $\qquad$ $\sec\alpha\in\mathbb{R}-(-1,1)$ $\qquad$ $-\infty\le\operatorname{cotg}\alpha\le+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2) $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (Identidad fundamental de la Trigonometría)</td></tr>
<tr><td>3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$</td><td>4) $\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$</td><td>5) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$</td><td>6) $1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7) $\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}\\ \operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\end{cases}$</td><td colspan="2">8) $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha}\\ \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">9) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\\ \operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\end{cases}$</td></tr>
</table>

10) Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

11) Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

12) Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \qquad \cos\ 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha \qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\ \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

13) Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

14) Transformación de sumas en productos

$$\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{B}=2\cdot\operatorname{sen}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\hat{A}-\operatorname{sen}\hat{B}=2\cdot\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$$

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=2\cdot\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$$

$$\cos\hat{A}-\cos\hat{B}=-2\cdot\operatorname{sen}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$$

15) Transformación de productos en sumas

$$\operatorname{sen}\hat{A}\cdot\cos\hat{B}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+\operatorname{sen}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right]$$

$$\operatorname{sen}\hat{A}\cdot\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)-\cos\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right]$$

$$\cos\hat{A}\cdot\cos\hat{B}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\hat{A}-\hat{B}\right)+\cos\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\right]$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo es hallar todos sus elementos desconocidos.

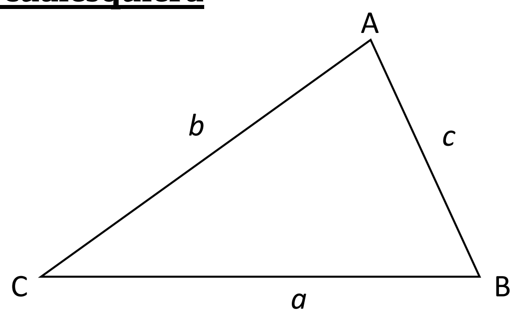
En un triángulo hay que determinar 6 elementos: sus tres ángulos y sus tres lados.

Resolución de triángulos rectángulos

Para resolver un triángulo rectángulo se puede utilizar:

- La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º
- El teorema de Pitágoras
- Las definiciones de las razones trigonométricas

Resolución de triángulos cualesquiera



Teorema de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}}$$

Teorema del coseno

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos\hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\hat{C} \end{array}}$$

Teorema de la tangente

En cualquier triángulo ABC se verifica que: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}$

Área de un triángulo: $\text{Área} = \dfrac{1}{2}\cdot \text{base}\cdot \text{altura} = \dfrac{1}{2} a\cdot c\cdot \operatorname{sen}\hat{B}$