FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1. VALOR NUMÉRICO Y RAÍCES DE UN POLINOMIO

- Sean $P(x)$ un polinomio y a un número real cualquiera. Se llama **valor numérico de $P(x)$ en $x = a$** al número que resulta de sustituir en $P(x)$ la variable x por a y realizar las operaciones correspondientes. Se denota por $\boldsymbol{P(a)}$.

  Ejemplo

  Halla el valor numérico de $P(x)=x^3-2x^2+5x-2$ en $x=-2$

  $P(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-2=-8-8-10-2=-28 \quad \Rightarrow \quad P(-2)=-28$

- Sean $P(x)$ un polinomio y a un número real cualquiera.

  Se dice que **a es una raíz de $P(x)$** si el valor numérico de $P(x)$ en $x=a$ es cero, es decir,

  $$\boxed{a \text{ es una raíz de } P(x) \text{ si } P(a)=0}$$

- **Teorema Fundamental del Álgebra**: Todo polinomio de grado *n* admite *n* raíces reales o complejas. En particular, todo polinomio de grado *n* admite como máximo *n* raíces reales.

- Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros se encuentran entre los divisores del término independiente.

  $$\boxed{\text{Posibles raíces enteras} = \{\text{Divisores del término independiente}\}}$$

Ejemplos

1. Halla las raíces de $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$

   - $P(x)$ es un polinomio de grado 3 $\Rightarrow$ como máximo tiene 3 raíces reales
   - Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-12)=\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12\}$
     - $P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-12=-1+3+4-12=-6\neq 0 \quad \Rightarrow \quad -1$ no es raíz de $P(x)$
     - $P(1)=1^3+3\cdot 1^2-4\cdot 1-12=1+3-4-12=-12\neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1$ no es raíz de $P(x)$
     - $P(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-12=-8+12+8-12=0 \quad \Rightarrow$ **-2 es raíz de $P(x)$**
     - $P(2)=2^3+3\cdot 2^2-4\cdot 2-12=8+12-8-12=0 \quad \Rightarrow$ **2 es raíz de $P(x)$**
     - $P(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)-12=-27+27+12-12=0 \quad \Rightarrow$ **-3 es raíz de $P(x)$**

   Por tanto, Raíces de $P(x)=\{-2,\ \ 2\ ,\ -3\}$

2. Halla el valor de k sabiendo que -1 es una raíz de $P(x)=2x^3-kx^2-3x+2$

   -1 es raíz de $P(x) \Rightarrow P(-1)=0 \Rightarrow 2\cdot(-1)^3-k\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+2=0 \Rightarrow -2-k+3+2=0 \Rightarrow$

   $\Rightarrow k=3$

2. TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre el binomio $(x-a)$ coincide con el valor numérico de $P(x)$ en $x=a$. Es decir, $P(x):(x-a) \quad \Rightarrow \quad \text{resto} = P(a)$

Ejemplos

1. Halla el resto de la siguiente división sin efectuarla $(x^3 - x^2 + 3x + 8):(x+1)$

$$\text{Resto} = P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 3\cdot(-1) + 8 = -1-1-3+8 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{Resto} = 3$$

2. Halla el valor de a para que el resto de la división $(x^2 + ax - 10):(x+2)$ sea 3

$$(x^2 + ax - 10):(x+2) \text{ tiene resto } 3 \Rightarrow \text{ Resto } = P(-2) = 3 \Rightarrow (-2)^2 + a\cdot(-2) - 10 = 3 \Rightarrow 4 - 2a - 12 = 3$$

$$\Rightarrow \quad -2a = 11 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{11}{2}$$

3. TEOREMA DEL FACTOR

$(x-a)$ es un factor (divisor) de $P(x) \Leftrightarrow P(x):(x-a)$ tiene $\text{resto} = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0$

Ejemplos

1. Estudia si $(x-1)$ es un factor de $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x - 1$

$(x-1)$ es un factor de $P(x) \Leftrightarrow P(x):(x-1)$ tiene $\text{resto} = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0$

$P(1) = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 2\cdot 1 - 1 = 3-5+2-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)$ NO es un factor de $P(x)$

2. Halla el valor de m sabiendo que $(x+2)$ es un factor de $P(x) = 2x^3 + mx^2 - 4x - 4$

$(x+2)$ es un factor de $P(x) \quad \Rightarrow \quad P(x):(x+2)$ tiene $\text{resto} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(-2) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot(-2)^3 + m\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -16 + 4m + 8 - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4m = 12 \quad \Rightarrow \quad m = 3$$

$\boxed{\textbf{\textit{a} es una raíz de } \boldsymbol{P(x)}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{P(a) = 0}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\textbf{El resto de la división } \boldsymbol{P(x) : (x - a)} \textbf{ es cero}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\boldsymbol{(x - a)} \textbf{ es un factor de } \boldsymbol{P(x)}}$

3. Escribe un polinomio $P(x)$ de grado 3 cuyas raíces sean – 1, 2 y – 3

Solución

– 1, 2 y – 3 son raíces de $P(x) \Rightarrow (x+1)$, $(x-2)$ y $(x+3)$ son factores de $P(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P(x) = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3) \xrightarrow{\text{multiplica ndo}} P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

- Un **polinomio** $P(x)$ se dice **irreducible** cuando no se puede descomponer en producto de otros polinomios de menor grado que él. En caso contrario se dice que es **reducible**.

  Ejemplos

  a) x^2-9 es reducible ya que $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$

  b) x^2+1 es irreducible porque no existen polinomios de primer grado $(ax+b)$ y $(cx+d)$ tales que $x^2+1=(ax+b)\cdot(cx+d)$

- **Factorizar un polinomio** es expresarlo como el producto de factores lo más sencillos posible, esto es, binomios de primer grado de la forma $(x\pm a)$ y polinomios irreducibles.

4.1. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MEDIANTE EXTRAER FACTOR COMÚN Y/O LAS IDENTIDADES NOTABLES

I) Sacar factor común

a) $2x^2-8x=2x\cdot(x-4)$ Raíces $=\{0,4\}$

b) $-3x^3+24x^2=-3x^2(x-8)$ Raíces $=\{0\,(\text{doble}),8\}$

II) Identidades notables

a) $x^2-81=(x-9)(x+9)$ Raíces $=\{9,-9\}$

b) $x^2+10x+25=(x+5)^2$ Raíces $=\{-5(\text{doble})\}$

III) Sacar factor común e identidades notables

a) $2x^4-32x^2=2x^2(x^2-16)=2x^2(x-4)(x+4)$ Raíces $=\{0\,(\text{doble}),4,-4\}$

b) $3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$ Raíces $=\{-1(\text{doble})\}$

c) $3x^6-12x^2=3x^2(x^4-4)=3x^2(x^2+2)(x^2-2)=3x^2(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Raíces $=\{0\ (\text{doble}),\ -\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\}$

4.2. POLINOMIO DE PRIMER GRADO $\rightarrow P(x)=ax+b$

> Si $P(x)=ax+b$ es un polinomio de primer grado, para factorizarlo extraemos factor común el coeficiente principal "a" y entonces: $P(x)=a\cdot\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$ Raíz de $P(x)=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Ejemplos

a) $2x+8=2(x+4)$ Raíz $=\{-4\}$

b) $-5x+15=-5(x-3)$ Raíz $=\{3\}$

c) $2x+17=2\left(x+\dfrac{17}{2}\right)$ Raíz $=\{-17/2\}$

d) $-5x+13=-5\left(x-\dfrac{13}{5}\right)$ Raíz $=\{13/5\}$

4.3. POLINOMIO DE 2º GRADO $\rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$

1º) Hallamos las raíces de $P(x)=0$: $P(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha_1 \\ x=\alpha_2 \end{cases}$
2º) La factorización de $P(x)$ es: $P(x) = a\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)$

Ejemplos

a) Factoriza $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$

- Determinamos las raíces de $P(x)$

$-2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow a=-2 \quad b=-5 \quad c=3$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)} = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{-4} = \frac{5\pm 7}{-4} = \begin{cases} -3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ es factor} \\ \frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ es factor} \end{cases}$$

- Por tanto,

Factorización : $P(x) = -2\cdot(x+3)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ Raíces $= \left\{-3, \ \frac{1}{2}\right\}$

b) Factoriza $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

- Raíces de $P(x)$

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow a=4 \quad b=-4 \quad c=1$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4} = \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8} = \frac{4\pm 0}{8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ es factor} \\ \frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ es factor} \end{cases}$$

- Por tanto,

Factorización : $P(x) = 4\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ Raíces $= \left\{\frac{1}{2} \text{ (doble)}\right\}$

c) Factoriza $P(x) = 2x^2 + 3x + 4$

- Raíces de $P(x)$

$2x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow a=2 \quad b=3 \quad c=4$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-32}}{4} \Rightarrow \text{no tiene solución real} \Rightarrow P(x) \text{ no tiene raíces reales}$$

- Factorización: $P(x)$ es irreducible

4.4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR QUE 2

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado $n > 2$

1º) Determinamos las posibles raíces enteras de $P(x)$

Posibles raíces enteras de $P(x)$ = {divisores del término independiente a_0 }

2º) Elegimos una de las posibles raíces "a" y dividimos $P(x)$ entre $(x-a)$

- Si la división no es exacta $\Rightarrow$ "a" no es raíz de $P(x)$ $\Rightarrow$ $(x-a)$ no es factor de $P(x)$
- Si la división es exacta $\Rightarrow$ "a" es raíz de $P(x)$ $\Rightarrow (x-a)$ es factor de $P(x)$ $\Rightarrow P(x) = (x-a)\cdot C(x)$ con $C(x)$ cociente de la división

3º) Ahora continuamos factorizando $C(x)$

- Si $C(x)$ es un polinomio de 2º grado, lo factorizamos como hemos visto en el apartado 4.3.
- Si $C(x)$ es un polinomio de grado mayor que 2, repetimos el paso anterior hasta que el cociente de la división sea un polinomio de grado 2 y lo podamos factorizar como hemos visto en el apartado 4.3.

Ejemplos

a) Factoriza $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2$

Posibles raíces enteras = Div(2) $= \{\pm 1, \pm 2\}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & +5 & -5 & -5 & +2 \\
1 & & +3 & +8 & +3 & -2 \\
\hline
 & 3 & +8 & +3 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x-1)\cdot\underbrace{(3x^3+8x^2+3x-2)}_{\text{ahora repetimos el proceso con este polinomio}}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & +8 & +3 & -2 \\
-1 & & -3 & -5 & +2 \\
\hline
 & 3 & +5 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 es raíz y $(x+1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot\underbrace{(3x^2+5x-2)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para determinar las raíces y factorizar ($3x^2 + 5x - 2$) resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$3x^2+5x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5\pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} \text{ es raíz y } \left(x-\dfrac{1}{3}\right) \text{ factor} \\ -2 \text{ es raíz y } (x+2) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+5x-2 = 3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Luego, $P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot 3\cdot(x+2)\cdot\left(x-\dfrac{1}{3}\right) = 3(x-1)(x+1)(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$

Solución

$P(x) = 3(x-1)(x+1)(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$ Raíces $= \left\{1, -1, -2, \dfrac{1}{3}\right\}$

b) Factoriza $P(x) = 2x^7 + 9x^6 + 9x^5 - x^4 - 3x^3$

- Extraemos factor común: $P(x) = x^3 \cdot (2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3)$

Posibles raíces enteras $= \text{Div}(-3) = \{\pm 1, \pm 3\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & +9 & +9 & -1 & -3 \\
-1 & & -2 & -7 & -2 & +3 \\
\hline
 & 2 & +7 & +2 & -3 & \boxed{0} \\
-3 & & -6 & -3 & +3 & \\
\hline
 & 2 & +1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz y $(x+1)$ factor $\Rightarrow P(x) = x^3 \cdot (x+1) \cdot \underbrace{(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)}_{\text{ahora repetimos el proceso con este polinomio}}$

$\Rightarrow -3$ es raíz y $(x+3)$ factor $\Rightarrow P(x) = x^3 \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot \underbrace{(2x^2 + x - 1)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para determinar las raíces y factorizar $(2x^2 + x - 1)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ factor} \\ -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 2 \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- Luego, $P(x) = x^3 \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Solución

$P(x) = 2x^3 (x+1)^2 (x+3) \left(x - \frac{1}{2}\right)$	Raíces $= \left\{0(\text{triple}),\ -1(\text{doble}),\ -3,\ \frac{1}{2}\right\}$