Ejercicio 1

a) $2x-8=2(x-4)$ Raíz $=\{4\}$

b) $-5x+15=-5(x-3)$ Raíz $=\{3\}$

c) $5x-25=5(x-5)$ Raíz $=\{5\}$

d) $4x+13=4\left(x+\frac{13}{4}\right)$ Raíz $=\left\{-\frac{13}{4}\right\}$

e) $3x-11=3\left(x-\frac{11}{3}\right)$ Raíz $=\left\{\frac{11}{3}\right\}$

f) $6x+15=6\left(x+\frac{15}{6}\right)=6\left(x+\frac{5}{2}\right)$ Raíz $=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

g) $-9x+24=-9\left(x-\frac{24}{9}\right)=-9\left(x-\frac{8}{3}\right)$ Raíz $=\left\{\frac{8}{3}\right\}$

h) $-8x+16=-8(x-2)$ Raíz $=\{2\}$

i) $3x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)$ Raíz $=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Ejercicio 2

a) $P(x)=-3x^2+2x+5$

- Hallamos las raíces de $P(x)$

$-3x^2+2x+5=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot 5}}{2\cdot(-3)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{-6}=\frac{-2\pm 8}{-6}=\begin{cases}-1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor}\\ \frac{5}{3} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{5}{3}\right) \text{ factor}\end{cases}$$

- Factorización: $P(x)=-3(x+1)\left(x-\frac{5}{3}\right)$ Raíces $=\left\{-1\ ,\ \frac{5}{3}\right\}$

b) $P(x)=3x^2-6x-9$

- Hallamos las raíces del polinomio:

$$3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot(-9)}}{2\cdot 3}=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{6}=\frac{6\pm 12}{6}=\begin{cases}3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ factor}\\ -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor}\end{cases}$$

- Factorización: $P(x)=3(x-3)(x+1)$ Raíces $=\{3,-1\}$

c) $P(x)=3x^2-5x+2$

- Hallamos las raíces de $P(x)$

$3x^2-5x+2=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}=\begin{cases}1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor}\\ \frac{2}{3} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{2}{3}\right) \text{ factor}\end{cases}$$

- Factorización: $P(x)=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$ Raíces $=\left\{1\ ,\ \frac{2}{3}\right\}$

d) $P(x)=2x^2+x+3$

- Hallamos las raíces del polinomio:

$$2x^2+x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}= \text{no tiene solución real}$$

- Factorización: $P(x)=2x^2+x+3$ <u>es irreducible</u>

e) $P(x)=x^2+x-20$

- Hallamos las raíces del polinomio:

$$x^2+x-20=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\pm 9}{2}=\begin{cases}4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor}\\ -5 \text{ es raíz y } (x+5) \text{ factor}\end{cases}$$

- Factorización: $P(x)=(x-4)(x+5)$ Raíces $=\{4,-5\}$

f) $P(x)=6x^2+x-1$

- Hallamos las raíces de $P(x)$

$6x^2+x-1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}=\begin{cases}\frac{1}{3} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{1}{3}\right) \text{ factor}\\ -\frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x+\frac{1}{2}\right) \text{ factor}\end{cases}$$

- Factorización: $P(x)=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ Raíces $=\left\{\frac{1}{3}\ ,-\frac{1}{2}\right\}$

Ejercicio 3

1) $3x^2 - 6x = \boxed{3x\cdot(x-2)}$	$\text{Raíces} = \{0,\ 2\}$
2) $5x^3 - 10x^2 + 5x = 5x\cdot(x^2 - 2x + 1) = \boxed{5x\cdot(x-1)^2}$	$\text{Raíces} = \{0, 1\,(\text{doble})\}$
3) $-15x^4 + 60x^3 - 60x^2 = -15x^2\cdot(x^2 - 4x + 4) = \boxed{-15x^2\cdot(x-2)^2}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}),\ 2\,(\text{doble})\}$
4) $-2x^2 + 8x = \boxed{-2x\cdot(x-4)}$	$\text{Raíces} = \{0,\ 4\}$
5) $3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x\cdot(x^2 + 2x + 1) = \boxed{3x\cdot(x+1)^2}$	$\text{Raíces} = \{0, -1\,(\text{doble})\}$
6) $-3x^3 - 24x^2 - 48x = -3x\cdot(x^2 + 8x + 16) = \boxed{-3x\cdot(x+4)^2}$	$\text{Raíces} = \{0, -4\,(\text{doble})\}$
7) $-4x^3 + 12x^2 = \boxed{-4x^2\cdot(x-3)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}), 3\}$
8) $a^4 - 16a^2 = a^2\cdot(a^2 - 16) = \boxed{a^2\cdot(a+4)\cdot(a-4)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}),\ -4, 4\}$
9) $-5x^5 + 405x = -5x\cdot(x^4 - 81) = -5x\cdot(x^2+9)\cdot(x^2-9) = \boxed{-5x\cdot(x^2+9)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}$	$\text{Raíces} = \{0, -3,\ 3\}$
10) $5x^3 - 15x^2 = \boxed{5x^2\cdot(x-3)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}),\ 3\}$
11) $5x^3 + 40x^2 + 80x = 5x\cdot(x^2 + 8x + 16) = \boxed{5x\cdot(x+4)^2}$	$\text{Raíces} = \{0, -4\,(\text{doble})\}$
12) $x^3 - \frac{16}{100}x = x^3 - \frac{4}{25}x = x\cdot\left(x^2 - \frac{4}{25}\right) = \boxed{x\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{5}\right)}$	$\text{Raíces} = \left\{0, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$
13) $-3x^3 + 12x^2 = \boxed{-3x^2\cdot(x-4)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}),\ 4\}$
14) $2x^5 - 12x^4 + 18x^3 = 2x^3\cdot(x^2 - 6x + 9) = \boxed{2x^3\cdot(x-3)^2}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{triple}),\ 3\,(\text{doble})\}$
15) $3x^4 - 12 = 3\cdot(x^4 - 4) = 3\cdot(x^2+2)\cdot(x^2-2) = \boxed{3\cdot(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$	$\text{Raíces} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
16) $-2x^4 - 4x^3 = \boxed{-2x^3\cdot(x+2)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{triple}),\ -2\}$
17) $3x^6 - 3x^2 = 3x^2\cdot(x^4 - 1) = 3x^2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1) = \boxed{3x^2\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$	$\text{Raíces} = \{0\,(\text{doble}),\ -1,\ 1\}$

18) $-5x^5+320x=-5x\cdot(x^4-64)=-5x\cdot(x^2+8)\cdot(x^2-8)=\boxed{-5x\cdot(x^2+8)\cdot(x+\sqrt{8})\cdot(x-\sqrt{8})}$ Raíces $=\{0,-\sqrt{8},\sqrt{8}\}$	
19) $x^3-16x^2+64x=x\cdot(x^2-16x+64)=\boxed{x\cdot(x-8)^2}$	Raíces $=\{0,\ 8\,(\text{doble})\}$
20) $x^5-6x^4+9x^3=x^3\cdot(x^2-6x+9)=\boxed{x^3\cdot(x-3)^2}$	Raíces $=\{0\,(\text{triple}),\ 3\,(\text{doble})\}$
21) $2x^4-50x^2=2x^2\cdot(x^2-25)=\boxed{2x^2\cdot(x+5)\cdot(x-5)}$	Raíces $=\{0\,(\text{doble}),-5,5\}$
22) $3x^4+30x^3+75x^2=3x^2\cdot(x^2+10x+25)=\boxed{3x^2\cdot(x+5)^2}$	Raíces $=\{0\,(\text{doble}),\ -5\,(\text{doble})\}$
23) $-2x^3-24x^2-72x=-2x\cdot(x^2+12x+36)=\boxed{-2x\cdot(x+6)^2}$	Raíces $=\{0,-6\,(\text{doble})\}$
24) $-5x^4-50x^3-125x^2=-5x^2\cdot(x^2+10x+25)=\boxed{-5x^2\cdot(x+5)^2}$	Raíces $=\{0\,(\text{doble}),-5\,(\text{doble})\}$
25) $4x^5-36x=4x\cdot(x^4-9)=4x\cdot(x^2+3)\cdot(x^2-3)=\boxed{4x\cdot(x^2+3)\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})}$ Raíces $=\{0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$	
26) $9x^6-225x^2=9x^2\cdot(x^4-25)=9x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x^2-5)=\boxed{9x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})}$ Raíces $=\{0\,(\text{doble}),-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$	
27) $m^5+m^4+\frac{1}{4}m^3=m^3\cdot\left(m^2+m+\frac{1}{4}\right)=\boxed{m^3\cdot\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}$	Raíces $=\left\{0\,(\text{triple}),-\frac{1}{2}\,(\text{doble})\right\}$
28) $x^5-x^4+\frac{1}{4}x^3=x^3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=\boxed{x^3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$	Raíces $=\left\{0\,(\text{triple}),\ \frac{1}{2}\,(\text{doble})\right\}$
29) $5x^4-80x^2=5x^2\cdot(x^2-16)=\boxed{5x^2\cdot(x+4)\cdot(x-4)}$	Raíces $=\{0\,(\text{doble}),-4,4\}$
30) $2x^6-50x^2=2x^2\cdot(x^4-25)=2x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x^2-5)=\boxed{2x^2\cdot(x^2+5)\cdot(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})}$ Raíces $=\{0\,(\text{doble}),\ -\sqrt{5},\ \sqrt{5}\}$	

Ejercicio 4

a) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 15x$

- Extraemos factor común: $P(x) = x \cdot (2x^2 - 7x - 15)$
- Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(2x^2 - 7x - 15)$
  - ✓ $2x^2 - 7x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+120}}{4} = \dfrac{7 \pm 13}{4} = \begin{cases} 5 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor} \\ -\dfrac{3}{2} \text{ es raíz y } \left(x+\dfrac{3}{2}\right) \text{ factor} \end{cases}$
  - ✓ $2x^2 - 7x - 15 = 2(x-5)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$
- Factorización: $P(x) = x \cdot 2 \cdot (x-5) \cdot \left(x+\dfrac{3}{2}\right) = 2x(x-5)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ Raíces $= \left\{0, 5, -\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $P(x) = -2x^4 + 6x^3 + 8x^2$

- Extraemos factor común: $P(x) = -2x^2(x^2 - 3x - 4)$
- Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(x^2 - 3x - 4)$
  - $x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor} \\ -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \end{cases}$
  - $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$
  - Factorización: $P(x) = -2x^2(x-4)(x+1)$ Raíces $= \{0\,(\text{doble}), 4, -1\}$

c) $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 4x$

- Extraemos factor común x: $P(x) = x(3x^2 - 11x - 4)$
- Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(3x^2 - 11x - 4)$
  - ✓ $3x^2 - 11x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \dfrac{11 \pm 13}{6} = \begin{cases} 4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor} \\ -\dfrac{1}{3} \text{ es raíz y } \left(x+\dfrac{1}{3}\right) \text{ factor} \end{cases}$
  - ✓ $3x^2 - 11x - 4 = 3(x-4)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$
- Factorización: $P(x) = 3x(x-4)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ Raíces $= \left\{0, 4, -\dfrac{1}{3}\right\}$

d) $P(x) = -6x^5 - 39x^4 - 45x^3$

- Extraemos factor común: $P(x) = -3x^3(2x^2 + 13x + 15)$
- Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(2x^2 + 13x + 15)$
  - $2x^2 + 13x + 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169-120}}{4} = \dfrac{-13 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \text{ es raíz y } \left(x + \dfrac{3}{2}\right) \text{ factor} \\ -5 \text{ es raíz y } (x+5) \text{ factor} \end{cases}$
  - $2x^2 + 13x + 15 = 2(x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$
  - Factorización: $P(x) = -3x^3 \cdot 2 \cdot (x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = -6x^3(x+5)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ Raíces $= \left\{0 \text{ (triple)}, -5\ , -\dfrac{3}{2}\right\}$

e) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

- Extraemos factor común x: $P(x) = x(x^2 + x - 6)$
- Hallamos las raíces y factorizamos el polinomio $(x^2 + x - 6)$
  - ✓ $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \\ -3 \text{ es raíz y } (x+3) \text{ factor} \end{cases}$
  - ✓ $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$
- Factorización: $P(x) = x(x-2)(x+3)$ Raíces $= \{0, 2, -3\}$

Ejercicio 5

a) $P(x)=(x^2-16)\cdot(2x^3-20x^2+50x)\cdot(x^2+1)$

- $x^2-16=(x-4)(x+4)$
- $2x^3-20x^2+50x=2x\cdot(x^2-10x+25)=2x\cdot(x-5)^2$
- (x^2+1) es irreducible

Por tanto,

$\boxed{P(x)=2x(x-4)(x+4)(x-5)^2(x^2+1)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,4,-4,5\,(\text{doble})\}}$

b) $P(x)=(x^2-5x+4)\cdot(-2x^3+2x)$

- $x^2-5x+4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{5\pm3}{2}=\begin{cases}4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor}\\ 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor}\end{cases}\Rightarrow$

  $\Rightarrow\quad x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$
- $-2x^3+2x=-2x(x^2-1)=-2x(x-1)(x+1)$

Por tanto,

$P(x)=(x-4)(x-1)(-2x)(x-1)(x+1)=\boxed{-2x(x-1)^2(x-4)(x+1)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,1(\text{doble}),4,-1\}}$

c) $P(x)=(x^3-x)\cdot(x^2-8x+16)\cdot(x^4-25)$

- $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$
- $x^2-8x+16=(x-4)^2$
- $x^4-25=(x^2+5)(x^2-5)=(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=x(x+1)(x-1)(x-4)^2(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,-1,1,4\,(\text{doble}),-\sqrt{5},\sqrt{5}\}}$

d) $P(x)=(2x^3-8x)\cdot(x^2+4)\cdot(x^2+7x-8)$

- $2x^3-8x=2x(x^2-4)=2x(x-2)(x+2)$
- x^2+4 Es irreducible
- $x^2+7x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\dfrac{-7\pm9}{2}=\begin{cases}1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor}\\ -8 \text{ es raíz y } (x+8) \text{ factor}\end{cases}\Rightarrow$

  $\Rightarrow x^2+7x-8=(x-1)(x+8)$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=2x(x-2)(x+2)(x^2+4)(x-1)(x+8)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,2,-2,1,-8\}}$

e) $P(x)=(x^2+1)\cdot(x^2-6x+5)\cdot(3x^3-18x^2+27x)$

- (x^2+1) es irreducible
- $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\dfrac{6\pm4}{2}=\begin{cases}5 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor}\\ 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor}\end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow\ x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$
- $3x^3-18x^2+27x=3x(x^2-6x+9)=3x(x-3)^2$

Por tanto,

$P(x)=(x^2+1)(x-1)(x-5)3x(x-3)^2=\boxed{3x(x^2+1)(x-1)(x-5)(x-3)^2}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,1,5,3\,(\text{doble})\}}$

f) $P(x)=(-3x^5+75x^3)\cdot(x^4-49)$

- $-3x^5+75x^3=-3x^3(x^2-25)=-3x^3(x-5)(x+5)$
- $x^4-49=(x^2-7)(x^2+7)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=-3x^3(x-5)(x+5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x^2+7)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0\,(\text{triple}),5,-5,\sqrt{7},-\sqrt{7}\}}$

g) $P(x)=(-4x+8)\cdot(x^2+x+1)\cdot(-2x^3+50x)$

- $-4x+8=-4(x-2)$
- (x^2+x+1) es irreducible

  $x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$ no tiene solución real
- $-2x^3+50x=-2x(x^2-25)=-2x(x+5)(x-5)$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=8x(x-2)(x^2+x+1)(x+5)(x-5)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,2,-5,5\}}$

h) $P(x)=(2x^2-32)\cdot(x^5-81x)\cdot(-3x^2+15)$

- $2x^2-32=2(x^2-16)=2(x+4)(x-4)$
- $x^5-81x=x(x^4-81)=x(x^2+9)(x^2-9)=x(x^2+9)(x+3)(x-3)$
- $-3x^2+15=-3(x^2-5)=-3(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=-6x(x+4)(x-4)(x^2+9)(x+3)(x-3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{0,-4,4,-3,3,\sqrt{5},-\sqrt{5}\}}$

i) $P(x)=(-2x^3+28x^2-98x)\cdot(-3x^2+6x-3)$

- $-2x^3+28x^2-98x=-2x(x^2-14x+49)=-2x(x-7)^2$
- $-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=6x\ (x-7)^2(x-1)^2}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{\,0,\,7\,(\text{doble})\,,1(\text{doble})\,\}}$

j) $P(x)=(-2x^4+14x^2)\cdot(x^2+13x+12)\cdot(6x+6)$

- $-2x^4+14x^2=-2x^2(x^2-7)=-2x^2(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$
- $x^2+13x+12=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{-13\pm\sqrt{169-48}}{2}=\dfrac{-13\pm 11}{2}=\begin{cases}-1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor}\\ -12 \text{ es raíz y } (x+12) \text{ factor}\end{cases}\Rightarrow$

  $\Rightarrow\quad x^2+13x+12=(x+1)(x+12)$
- $6x+6=6(x+1)$

Por tanto,

$\boxed{P(x)=-12x^2(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+1)^2(x+12)}$ $\boxed{\text{Raíces}=\{\,0\,(\text{doble}),-\sqrt{7}\,,\sqrt{7}\,,-1(\text{doble}),-12\,\}}$

Ejercicio 6

a) $P(x) = x^4 - 18x^2 + 32x - 15$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1\,,\ \pm 3\,,\ \pm 5,\ \pm 15\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -18 & +32 & -15 \\ 1 & & +1 & +1 & -17 & +15 \\ \hline & 1 & +1 & -17 & +15 & \boxed{0} \\ 1 & & +1 & +2 & -15 & \\ \hline & 1 & +2 & -15 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x-1)\cdot(x^3 + x^2 - 17x + 15)$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot \underbrace{(x^2 + 2x - 15)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 2x - 15)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ factor} \\ -5 \text{ es raíz y } (x+5) \text{ factor} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$$

Por tanto, $P(x) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x+5) = (x-1)^2(x-3)(x+5)$

Solución

$P(x) = (x-1)^2(x-3)(x+5)$	Raíces = { 1 (doble) , 3 , -5 }

b) $P(x) = 2x^5 + 9x^4 + 9x^3 - x^2 - 3x$

- Extraemos factor común: $P(x) = x\cdot(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - x - 3)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-3) = \{\pm 1,\ \pm 3\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & +9 & +9 & -1 & -3 \\ -1 & & -2 & -7 & -2 & +3 \\ \hline & 2 & +7 & +2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -2 & -5 & +3 & \\ \hline & 2 & +5 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz y $(x+1)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(2x^3 + 7x^2 + 2x - 3)$

$\Rightarrow -1$ es raíz y $(x+1)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = x\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot \underbrace{(2x^2 + 5x - 3)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2 + 5x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \text{ factor} \\ -3 \text{ es raíz y } (x+3) \text{ factor} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

- Por tanto, $P(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x+3)=2x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$

Solución

$P(x)=2x(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$ Raíces $=\{\,0,-1\,(\text{doble})\,,\frac{1}{2},\ -3\,\}$

c) $P(x)=x^4-5x^3-x^2+17x+12$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(12)=\{\pm1,\ \pm2,\pm3,\pm4,\ \pm6,\pm12\}$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -5 & -1 & +17 & +12 \\
-1 & & -1 & +6 & -5 & -12 \\ \hline
 & 1 & -6 & +5 & +12 & \boxed{0}
\end{array}\Rightarrow -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ es factor} \Rightarrow P(x)=(x+1)\cdot(x^3-6x^2+5x+12)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
-1 & & -1 & +7 & -12 \\ \hline
 & 1 & -7 & +12 & \boxed{0}
\end{array}\Rightarrow -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ es factor} \Rightarrow P(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot\underbrace{(x^2-7x+12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2-7x+12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2-7x+12=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm1}{2}=\begin{cases}4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor}\\ 3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ factor}\end{cases}\Rightarrow x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$$

Por tanto, $P(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-4)\cdot(x-3)=(x+1)^2(x-4)(x-3)$

Solución

$P(x)=(x+1)^2(x-4)(x-3)$ Raíces $=\{-1\,(\text{doble})\,,4\,,3\}$

d) $P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-18)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\ \pm9,\pm18\}$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & +5 & +1 & -21 & -18 \\
-1 & & -1 & -4 & +3 & +18 \\ \hline
 & 1 & +4 & -3 & -18 & \boxed{0}
\end{array}\Rightarrow -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \Rightarrow P(x)=(x+1)\cdot(x^3+4x^2-3x-18)$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
+2 & & +2 & +12 & +18 \\ \hline
 & 1 & +6 & +9 & \boxed{0}
\end{array}\Rightarrow 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \Rightarrow P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot\underbrace{(x^2+6x+9)}_{\text{identidad notable}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)^2$

Solución

$P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)^2$ Raíces $=\{\ -1,\ 2,\ -3\,(\text{doble})\,\}$

e) $P(x)=3x^4+12x^3+3x^2-24x-18$

- Extraemos factor común: $P(x)=3\cdot(x^4+4x^3+x^2-8x-6)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^4+4x^3+x^2-8x-6)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-6)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +4 & +1 & -8 & -6 \\
-1 & & -1 & -3 & +2 & +6 \\
\hline
 & 1 & +3 & -2 & -6 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 0 & +6 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 es raíz y $(x+1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x)=3(x+1)\cdot(x^3+3x^2-2x-6)$

$\Rightarrow$ -3 es raíz y $(x+3)$ factor $\Rightarrow$ $P(x)=3\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot\underbrace{(x^2-2)}_{\text{identidad notable}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad P(x)=3(x+1)(x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Solución

$P(x)=3(x+1)(x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ Raíces $=\{-1,-3,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

f) $P(x)=2x^4-3x^3-23x^2+12x$

- Extraemos factor común: $P(x)=x\cdot(2x^3-3x^2-23x+12)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(2x^3-3x^2-23x+12)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(12)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -23 & +12 \\
-3 & & -6 & +27 & -12 \\
\hline
 & 2 & -9 & +4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ -3 es raíz y $(x+3)$ factor $\Rightarrow$ $P(x)=x\cdot(x+3)\cdot(2x^2-9x+4)$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2-9x+4)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2-9x+4=0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm7}{4}=\begin{cases}4 \text{ es raíz y } (x-4) \text{ factor}\\ \frac{1}{2} \text{ es raíz y } \left(x-\frac{1}{2}\right) \text{ factor}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2x^2-9x+4=2(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

- Por tanto, $P(x)=x\cdot(x+3)\cdot2(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x(x+3)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Solución

$P(x)=2x(x+3)(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ Raíces $=\{0,-3,4,1/2\}$

g) $P(x) = 6x^5 + 23x^4 - 38x^3 - 15x^2$

- Extraemos factor común: $P(x) = x^2 \cdot (6x^3 + 23x^2 - 38x - 15)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(6x^3 + 23x^2 - 38x - 15)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1,\ \pm 3, \pm 5,\ \pm 15\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & +23 & -38 & -15 \\ -5 & & -30 & +35 & +15 \\ \hline & 6 & -7 & -3 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad -5 \text{ es raíz y } (x+5) \text{ factor} \quad \Rightarrow \quad P(x) = x^2 \cdot (x+5) \cdot (6x^2 - 7x - 3)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(6x^2 - 7x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$6x^2 - 7x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \text{ es raíz y } \left(x - \dfrac{3}{2}\right) \text{ factor} \\ -\dfrac{1}{3} \text{ es raíz y } \left(x + \dfrac{1}{3}\right) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2 \cdot (x+5) \cdot 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 6x^2\,(x+5)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

Solución

$P(x) = 6x^2(x+5)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$	Raíces = $\{0\,(\text{doble}), -5,\ 3/2,\ -1/3\}$

h) $P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(24) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 4,\ \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & +10 & +35 & +50 & +24 \\ -1 & & -1 & -9 & -26 & -24 \\ \hline & 1 & +9 & +26 & +24 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x+1) \cdot (x^3 + 9x^2 + 26x + 24)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & & -2 & -14 & -24 \\ \hline & 1 & +7 & +12 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \quad -2 \text{ es raíz y } (x+2) \text{ factor} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \underbrace{(x^2 + 7x + 12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 7x + 12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \text{ es raíz y } (x+3) \text{ factor} \\ -4 \text{ es raíz y } (x+4) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \cdot (x+4)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \cdot (x+4)$	Raíces = $\{-1, -2, -3, -4\}$

i) $P(x) = x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 11x + 6$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & +6 & +12 & +12 & +11 & +6 \\ -1 & & -1 & -5 & -7 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & +5 & +7 & +5 & +6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -6 & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & +3 & +1 & +3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & & \\ \hline & 1 & 0 & +1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\Rightarrow -1$ es raíz y $(x+1)$ factor $\Rightarrow P(x) = (x+1)\cdot(x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 6)$

$\Rightarrow -2$ es raíz y $(x+2)$ factor $\Rightarrow P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)$

$\Rightarrow -3$ es raíz y $(x+3)$ factor $\Rightarrow P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{\text{irreducible}}$

Por tanto, $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdot(x^2+1)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\cdot(x^2+1)$	Raíces $= \{-1, -2, -3\}$

j) $P(x) = 2x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 10x$

- Extraemos factor común: $P(x) = 2x\cdot(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(5) = \{\pm 1,\ \pm 5\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +3 & -9 & +5 \\ 1 & & +1 & +4 & -5 \\ \hline & 1 & +4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow P(x) = 2x\cdot(x-1)\cdot(x^2 + 4x - 5)$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 4x - 5)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \\ -5 \text{ es raíz y } (x+5) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$

- Por tanto, $P(x) = 2x\cdot(x-1)\cdot(x-1)(x+5) = 2x(x-1)^2(x+5)$

Solución

$P(x) = 2x(x-1)^2(x+5)$	Raíces $= \{0, 1(\text{doble}), -5\}$

k) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 6x$

- Extraemos factor común: $P(x) = x \cdot (2x^3 + 3x^2 - 11x - 6)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & +3 & -11 & -6 \\ 2 & & +4 & +14 & +6 \\ \hline & 2 & +7 & +3 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \ 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = x \cdot (x-2) \cdot (2x^2 + 7x + 3)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(2x^2 + 7x + 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ \text{ es raíz y } \left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ factor} \\ -3 \ \text{ es raíz y } (x+3) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2x^2 + 7x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

- Por tanto, $P(x) = x \cdot (x-2) \cdot 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3) = 2x\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3)$

Solución

$P(x) = 2x\,(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+3)$ Raíces $= \{0, 2, -1/2, -3\}$

l) $P(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 6$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-6) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3,\ \pm 6\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & +1 & +5 & -1 & -6 \\ 1 & & +1 & +2 & +7 & +6 \\ \hline & 1 & +2 & +7 & +6 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = (x-1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 7x + 6)$$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & & -1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & +1 & +6 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \ -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot \underbrace{(x^2 + x + 6)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + x + 6)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x + 6 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \ \Rightarrow \text{no tiene olución real} \ \Rightarrow \ (x^2 + x + 6) \ \text{ es irreducible}$$

Por tanto, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 6)$

Solución

$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 6)$ Raíces $= \{1, -1\}$

m) $P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -11 & +9 & +18 \\
-1 & & -1 & +2 & +9 & -18 \\
\hline
 & 1 & -2 & -9 & +18 & \boxed{0} \\
2 & & +2 & 0 & -18 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 es raíz y $(x+1)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x+1)\cdot(x^2 - 2x^2 - 9x + 18)$

$\Rightarrow$ 2 es raíz y $(x-2)$ es factor $\Rightarrow$ $P(x) = (x+1)\cdot(x-2)\cdot\underbrace{(x^2 - 9)}_{\text{identidad notable}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(x) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-3)$

Solución

$P(x) = (x+1)(x-2)(x+3)\cdot(x-3)$	Raíces $= \{-1, 2, -3, 3\}$

n) $P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + 11x^2 - 4x$

- Extraemos factor común: $P(x) = x\cdot(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +1 & -9 & +11 & -4 \\
1 & & +1 & +2 & -7 & +4 \\
\hline
 & 1 & +2 & -7 & +4 & \boxed{0} \\
1 & & +1 & +3 & -4 & \\
\hline
 & 1 & +3 & -4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot\underbrace{(x^2 + 3x - 4)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + 3x - 4)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \\ -4 \text{ es raíz y } (x+4) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$

- Por tanto, $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+4) = x(x-1)^3(x+4)$

Solución

$P(x) = x(x-1)^3(x+4)$	Raíces $= \{0, 1\,(\text{triple}), -4\}$

o) $P(x) = 2x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 20x$

- Extraemos factor común: $P(x) = 2x\cdot(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)$

Posibles raíces enteras = $\mathrm{Div}(10) = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 10\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & +3 & +10 \\ -1 & & -1 & +7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & +10 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \ -1 \text{ es raíz y } (x+1) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = 2x\cdot(x+1)\cdot(x^2 - 7x + 10)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 - 7x + 10)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor} \\ 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow \ x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$$

- Por tanto, $P(x) = 2x\,(x+1)(x-5)(x-2)$

Solución

$P(x) = 2x\,(x+1)(x-5)(x-2)$ Raíces $= \{0, -1, 5, 2\}$

p) $P(x) = -2x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2$

- Extraemos factor común: $P(x) = -2x^2\cdot(x^3 + x^2 - x - 1)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^3 + x^2 - x - 1)$

Posibles raíces enteras = $\mathrm{Div}(1) = \{\pm 1\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & & +1 & +2 & +1 \\ \hline & 1 & +2 & +1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \ 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = -2x^2\cdot(x-1)\cdot\underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{\text{identidad notable}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ P(x) = -2x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)^2$$

Solución

$P(x) = -2x^2(x-1)(x+1)^2$ Raíces $= \{0\,(\text{doble}), 1, -1\,(\text{doble})\}$

q) $P(x) = x^5 - 10x^4 + 31x^3 - 30x^2$

- Extraemos factor común: $P(x) = x^2 \cdot (x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-30) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 5,\ \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -10 & +31 & -30 \\ 2 & & +2 & -16 & +30 \\ \hline & 1 & -8 & +15 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \ 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \ \Rightarrow \ P(x) = x^2 \cdot (x-2) \cdot (x^2 - 8x + 15)$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 - 8x + 15)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor} \\ 3 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow \ x^2 - 8x + 15 = \ (x-5)(x-3)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2(x-2)(x-5)(x-3)$

Solución

$P(x) = x^2(x-2)(x-5)(x-3)$ Raíces = $\{0\,(\text{doble}), 2, 5, 3\}$

r) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 24x^2$

- Extraemos factor común: $P(x) = x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(24) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 4,\ \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & +2 & -13 & -14 & +24 \\ 1 & & +1 & +3 & -10 & -24 \\ \hline & 1 & +3 & -10 & -24 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -2 & +24 & \\ \hline & 1 & +1 & -12 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x^3 + 3x^2 - 10x - 24)$

$\Rightarrow$ -2 es raíz y $(x+2)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot \underbrace{(x^2 + x - 12)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + x - 12)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x - 12 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ factor} \\ -4 \text{ es raíz y } (x+4) \text{ factor} \end{cases} \Rightarrow \ x^2 + x - 12 = \ (x-3)(x+4)$$

- Por tanto, $P(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

Solución

$P(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ Raíces = $\{0\,(\text{doble}), 1, -2, 3, -4\}$

s) $P(x) = 4x^6 - 19x^5 - x^4 + 85x^3 - 51x^2 - 18x$

- Extraemos factor común: $P(x) = x\cdot(4x^5 - 19x^4 - x^3 + 85x^2 - 51x - 18)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(4x^5 - 19x^4 - x^3 + 85x^2 - 51x - 18)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-18) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 6,\ \pm 9, \pm 18\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r}
 & 4 & -19 & -1 & +85 & -51 & -18 & \\
1 & & +4 & -15 & -16 & +69 & +18 & \\
\hline
 & 4 & -15 & -16 & +69 & +18 & \boxed{0} & \\
-2 & & -8 & +46 & -60 & -18 & & \\
\hline
 & 4 & -23 & +30 & +9 & \boxed{0} & & \\
3 & & +12 & -33 & -9 & & & \\
\hline
 & 4 & -11 & -3 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow 1$ es raíz y $(x-1)$ factor $\Rightarrow P(x) = x(x-1)(4x^4 - 15x^3 - 16x^2 + 69x + 18)$

$\Rightarrow -2$ es raíz y $(x+2)$ factor y $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(4x^3 - 23x^2 + 30x + 9)$

$\Rightarrow$ 3 es raíz y $(x-3)$ factor $\Rightarrow$ $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot\underbrace{(4x^2 - 11x - 3)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$

Para buscar las raíces y factorizar $(4x^2 - 11x - 3)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$4x^2 - 11x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8} = \begin{cases} 3 \text{ es raíz y } (x-3) \text{ factor} \\ \dfrac{1}{4} \text{ es raíz y } \left(x - \dfrac{1}{4}\right) \text{ factor} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 11x - 3 = 4(x-3)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

- Por tanto, $P(x) = x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot 4\cdot(x-3)\cdot\left(x + \dfrac{1}{4}\right) = 4x(x-1)(x+2)(x-3)^2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$

Solución

$$\boxed{P(x) = 4x(x-1)(x+2)(x-3)^2\left(x + \frac{1}{4}\right) \qquad \text{Raíces} = \{0, 1, -2,\ 3\,(\text{doble}), -1/4\}}$$

t) $P(x) = x^6 + x^5 - 17x^4 - 50x^3 - 65x^2 - 47x - 15$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-15) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & +1 & -17 & -50 & -65 & -47 & -15 \\
-1 & & -1 & 0 & +17 & +33 & +32 & +15 \\
\hline
 & 1 & 0 & -17 & -33 & -32 & -15 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = (x+1)\cdot(x^5 - 17x^3 - 33x^2 - 32x - 15)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
-1 & & -1 & +1 & +16 & +17 & +15 \\
\hline
 & 1 & -1 & -16 & -17 & -15 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x^4 - x^3 - 16x^2 - 17x - 15)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & & -3 & +12 & +12 & +15 \\
\hline
 & 1 & -4 & -4 & -5 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -3 \text{ es raíz y } (x+3) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = (x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(x^3 - 4x^2 - 4x - 5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
5 & & +5 & +5 & +5 \\
\hline
 & 1 & +1 & +1 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow 5 \text{ es raíz y } (x-5) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = (x+1)^2\cdot(x+3)\cdot(x-5)\cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\text{polinomio de 2º grado}}$$

Para buscar las raíces y factorizar $(x^2 + x + 1)$ resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución real} \Rightarrow (x^2 + x + 1) \text{ es irreducible}$$

Solución

$$\boxed{P(x) = (x+1)^2(x+3)(x-5)(x^2 + x + 1) \qquad \text{Raíces} = \{-1\,(\text{doble}), -3, 5\}}$$

u) $P(x) = 5x^7 + 30x^6 + 25x^5 - 120x^4 - 180x^3$

- Extraemos factor común: $P(x) = 5x^3\cdot(x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36)$
- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x + 36)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-36) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & +6 & +5 & -24 & -36 \\
2 & & +2 & +16 & +42 & +36 \\
\hline
 & 1 & +8 & +21 & +18 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow 2 \text{ es raíz y } (x-2) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = 5x^3\cdot(x-2)\cdot(x^3 + 8x^2 + 21x + 18)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & & -2 & -12 & -18 \\
\hline
 & 1 & +6 & +9 & \boxed{0}
\end{array} \Rightarrow -2 \text{ es raíz y } (x+2) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = 5x^3\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot\underbrace{(x^2 + 6x + 9)}_{\text{identidad notable}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = 5x^3(x-2)(x+2)(x+3)^2$$

Solución

$$\boxed{P(x) = 5x^3(x-2)(x+2)(x+3)^2 \ \ \text{Raíces} = \{0\,(\text{triple}), 2, -2, -3\,(\text{doble})\}}$$

v) $P(x) = -2x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x$

- Extraemos factor común: $P(x) = -2x \cdot (x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8)$

- Ahora tenemos que factorizar el polinomio $(x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8)$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & +6 & +4 & -8 \\
-1 & & -1 & +6 & -12 & +8 \\
\hline
 & 1 & -6 & +12 & -8 & \underline{0} \\
2 & & +2 & -8 & +8 & \\
\hline
 & 1 & -4 & +4 & \underline{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow -1$ es raíz y $(x+1)$ es factor $\Rightarrow P(x) = -2x \cdot (x+1) \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

$\Rightarrow 2$ es raíz y $(x-2)$ es factor $\Rightarrow P(x) = -2x \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot \underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{\text{identidad notable}}$

$$\Rightarrow P(x) = -2x \cdot (x+1) \cdot \underbrace{(x-2) \cdot (x-2)^2}_{\text{agrupar}} \quad \Rightarrow \quad P(x) = -2x \cdot (x+1) \cdot (x-2)^3$$

Solución

$P(x) = -2x(x+1)(x-2)^3$ Raíces $= \{\ 0,\ -1,\ 2 \text{ (triple) } \}$

Ejercicio 7

a) $P(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)$ y $Q(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}=(x-1)(x+2)=x^2+x-2 \\ \text{m.c.m.}=(x-3)\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6 \end{array}}$$

b) $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)$ y $Q(x)=(x-1)\cdot(x-2)^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}=x-1 \\ \text{m.c.m.}=(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)=x^4-3x^3-2x^2+12x-8 \end{array}}$$

c) $P(x)=6\cdot(x+3)^2\cdot(x+1)$ y $Q(x)=4\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}=2(x+3)=2x+6 \\ \text{m.c.m.}=12\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)^2=12x^4+72x^3+96x^2-72x-108 \end{array}}$$

d) $P(x)=x^4-x^2$ y $Q(x)=2x^3+10x^2-12x$

- En primer lugar, debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$

  ✓ $P(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1) \Rightarrow \underline{P(x)=x^2(x-1)(x+1)}$

  ✓ $Q(x)=2x^3+10x^2-12x=2x\cdot\underbrace{(x^2+5x-6)}=2x(x-1)(x+6) \Rightarrow \underline{Q(x)=2x(x-1)(x+6)}$

  $$x^2+5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2}=\begin{cases}1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \\ -6 \text{ es raíz y } (x+6) \text{ factor}\end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}=x\cdot(x-1)=x^2-x \\ \text{m.c.m.}=2x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+6)=2x^5+12x^4-2x^3-12x^2 \end{array}}$$

e) $P(x)=x^5-16x$ y $Q(x)=3x^5-12x^4+12x^3$

- En primer lugar, debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$

  ✓ $P(x)=x^5-16x=x(x^4-16)=x(x^2+4)(x^2-4)=x(x^2+4)(x+2)(x-2) \Rightarrow$

  $\Rightarrow \underline{P(x)=x(x^2+4)(x+2)(x-2)}$

  ✓ $Q(x)=3x^5-12x^4+12x^3=3x^3(x^2-4x+4)=3x^3(x-2)^2 \Rightarrow \underline{Q(x)=3x^3(x-2)^2}$

- $$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}=x\cdot(x-2)=x^2-2x \\ \text{m.c.m.}=3x^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)=3x^8-6x^7-48x^4+96x^3 \end{array}}$$

f) $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ y $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

- En primer lugar, debemos factorizar $P(x)$ y $Q(x)$

$\boxed{P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(4) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & +4 \\ 1 & & +1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \Rightarrow P(x) = (x-1)\cdot\underbrace{(x^2-4)}_{\text{identidad notable}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)}$$

$\boxed{Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

Posibles raíces enteras = $\text{Div}(-4) = \{\pm 1,\ \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & +8 & -4 \\ 1 & & +1 & -4 & +4 \\ \hline & 1 & -4 & +4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 1 \text{ es raíz y } (x-1) \text{ factor} \Rightarrow Q(x) = (x-1)\cdot\underbrace{(x^2-4x+4)}_{\text{identidad notable}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Q(x) = (x-1)(x-2)^2}$$

- $\text{m.c.d.} = (x-2)\cdot(x-1) = x^2 - 3x + 2$

  $\text{m.c.m.} = (x-2)^2 \cdot (x-1)\cdot(x+2) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$