OPERACIONES CON FUNCIONES

1. SUMA Y RESTA DE FUNCIONES

- Dadas f y g funciones reales de variable real se define la **función suma (*f* + *g*)(*x*)** como:

$$\boxed{(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad \text{con} \qquad \mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)}$$

- Del mismo modo se define **la función resta (*f* – *g*)(*x*)** como:

$$\boxed{(f-g)(x)=f(x)-g(x) \qquad \text{con} \qquad \mathrm{Dom}(f-g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)}$$

<u>Ejemplo</u>

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ halla $(f+g)(x)$ y su dominio.

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\Re-\{-1\}$$

$$g(x)=\frac{x+2}{x^2-1}\rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\Re-\{-1,1\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-2x+1+x+2}{x^2-1}=$$

$$=\frac{x^2-x+3}{x^2-1}$$

- Por tanto, $(f+g)(x)=\dfrac{x^2-x+3}{x^2-1}$
- $\mathrm{Dom}(f+g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)=(\Re-\{-1\})\cap(\Re-\{-1,1\})=\Re-\{-1,1\}$

2. PRODUCTO DE FUNCIONES

Dadas f y g funciones reales de variable real se define la **función producto (*f* · *g*)(*x*)** como:

$$\boxed{(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \qquad \text{con} \qquad \mathrm{Dom}(f\cdot g)=\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)}$$

<u>Ejemplo</u>

Dadas las funciones $j(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ y $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$ hallar $(j\cdot s)(x)$ y su dominio.

$$j(x)=\frac{x-1}{x+1}\rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\Re-\{-1\}$$

$$s(x)=\frac{3-x}{x-1}\rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\Re-\{1\}$$

$$(j\cdot s)(x)=j(x)\cdot s(x)=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{3-x}{x-1}=\frac{3-x}{x+1}$$

- Por tanto, $(j \cdot s)(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$
- $\text{Dom}(j \cdot s) = \text{Dom}(j) \cap \text{Dom}(s) = (\Re - \{-1\}) \cap (\Re - \{1\}) = \Re - \{-1,1\}$

No se debe simplificar la expresión analítica de una operación con funciones si no se indica cuál es su dominio; de lo contrario, el dominio que se deduce después de la simplificación no es el correcto y la función no es la misma.

Observa el ejemplo anterior:

$$(j \cdot s)(x) = j(x) \cdot s(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{3-x}{x-1} = \frac{3-x}{x+1} \xrightarrow{\text{hemos simplificado y por tanto}} (j \cdot s)(x) = \frac{3-x}{x+1}$$

Si calculamos el dominio de la expresión simplificada $(j \cdot s)(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$ obtenemos $\text{Dom}(j \cdot s)(x) = \Re - \{-1\}$ que no coincide con el dominio real de $(j \cdot s)(x)$ $\text{Dom}(j \cdot s)(x) = [\text{Dom}(j) \cap \text{Dom}(s)] = \Re - \{-1,1\}$

3. COCIENTE DE FUNCIONES

Dadas f y g funciones reales de variable real se define **la función cociente (*f* / *g*)** como:

$$\boxed{(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{con} \qquad \text{Dom}(f/g) = [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)] - \{x \in \text{Dom}(g) \,/\, g(x) = 0\}}$$

<u>Ejemplo</u>

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ y $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ determina $(f/g)(x)$ y su dominio.

- $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x^2-4} : \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{x-1}{(x-3)(x^2-4)} = \dfrac{x-1}{x^3-3x^2-4x+12}$

  Por tanto, $(f/g)(x) = \dfrac{x-1}{x^3-3x^2-4x+12}$

- $\text{Dom}(f/g) = [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)] - \{x / g(x) = 0\}$
  - $\text{Dom}(f) = \Re - \{-2,2\}$
  - $\text{Dom}(g) = \Re - \{1\}$
  - $g(x) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x-3}{x-1} = 0 \;\Rightarrow\; x-3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$

  Por tanto, $\text{Dom}(f/g) = \left[\Re - \{-2,2\} \cap \Re - \{1\}\right] - \{3\} = \Re - \{-2,1,2,3\}$

4. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

- Dadas f y g funciones reales de variable real se define la función ***f* compuesta con *g*** y **se denota por** $\underline{(g \circ f)(x)}$ como la función que se obtiene aplicando la función g a $f(x)$ (es decir, aplicando la función g a la imagen de x por la función f)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

El **<u>dominio de la función *f* compuesta con *g*</u>** es $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \,/\, f(x) \in \text{Dom}(g)\}$.

Esto es así porque, tal y como hemos definido $(g \circ f)(x)$, dado un número real x para que exista $(g \circ f)(x)$ ha de existir primero $f(x)$ (es decir $x \in \text{Dom}(f)$) y después $f(x)$ tiene que pertenecer al $\text{Dom}(g)$ para poder calcular $g[f(x)]$.

Por tanto,

$$\boxed{\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g[f(x)] \\ \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \,/\, f(x) \in \text{Dom}(g)\} \end{array}}$$

- Del mismo modo, dadas f y g funciones reales de variable real se define **<u>la función *g* compuesta con *f*</u>** y se denota por $(f \circ g)(x)$ como la función que se obtiene aplicando la función f a $g(x)$ (es decir, aplicando la función f a la imagen de x por la función g)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right] & g(x) \arrow[r, "f"] & f[g(x)] \end{tikzcd}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

El **<u>dominio de la función *g* compuesta con *f*</u>** es $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \,/\, g(x) \in \text{Dom}(f)\}$.

Esto es así porque, tal y como hemos definido $(f \circ g)(x)$, dado un número real x para que exista $(f \circ g)(x)$ ha de existir primero $g(x)$ (es decir $x \in \text{Dom}(g)$) y después $g(x)$ tiene que pertenecer al $\text{Dom}(f)$ para poder calcular $f[g(x)]$.

Por tanto,

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$$
$$\mathrm{Dom}(f\circ g)=\{x\in \mathrm{Dom}(g)\ /\ g(x)\in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Observación: La composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa. Es decir, en general, $(f\circ g)(x)\neq (g\circ f)(x)$

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $g(x)=x-1$ hallar $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$ y sus dominios

- $\mathrm{Dom}(f)=\Re-\{x\ /\ x^2-4=0\}=\Re-\{-2,2\}$
- $\mathrm{Dom}(\mathrm{g})=\Re$

- $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{1}{x^2-4}-1=\dfrac{1-x^2+4}{x^2-4}=\dfrac{-x^2+5}{x^2-4} \quad\Rightarrow\quad (g\circ f)(x)=\dfrac{-x^2+5}{x^2-4}$

  $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\{x\in \mathrm{Dom}(f)\ /\ f(x)\in \mathrm{Dom}(g)\}=\left\{x\in\Re-\{-2,2\}\ /\ \dfrac{1}{x^2-4}\in\Re\right\}\underset{(*)}{=}\Re-\{-2,2\}$

  (*) $\dfrac{1}{x^2-4}\in\Re\ \ \forall\ x\in\Re-\{-2,2\}$

- $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[x-1]=\dfrac{1}{(x-1)^2-4}=\dfrac{1}{x^2-2x-3} \quad\Rightarrow\quad (f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

  $\mathrm{Dom}(f\circ g)=\{x\in \mathrm{Dom}(g)\ /\ g(x)\in \mathrm{Dom}(f)\}=\{x\in\Re\ /\ x-1\in\Re-\{-2,2\}\}=\Re-\{-1\ ,\ 3\}$

  $x-1\neq -2 \quad\Rightarrow\quad x\neq -1$

  $x-1\neq 2 \quad\Rightarrow\quad x\neq 3$

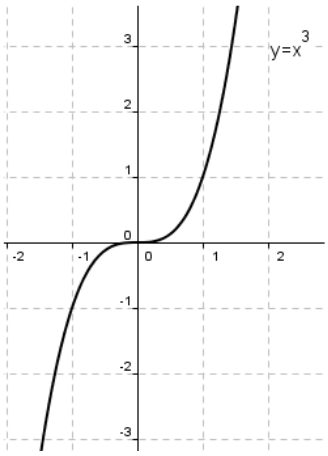
En el ejemplo se ve que la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, es decir, $(f\circ g)(x)\neq (g\circ f)(x)$

5. FUNCIÓN INVERSA

5.1. DEFINICIONES

- Una función $f(x)$ es **inyectiva** $\Leftrightarrow$ no hay dos elementos del dominio con la misma imagen $\Leftrightarrow$

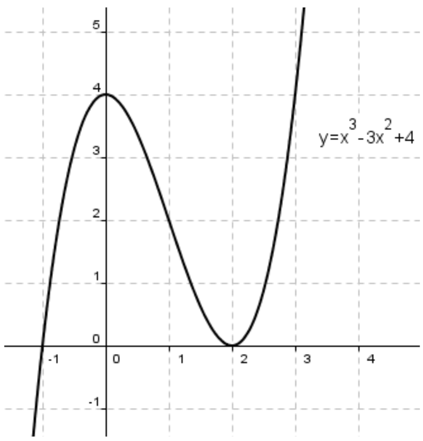
  $\Leftrightarrow$ [Si $f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$]
- Una función $f(x)$ es **suprayectiva** $\Leftrightarrow$ $\text{Rec}(f)=\Re$
- Una función $f(x)$ es **biyectiva** $\Leftrightarrow$ es inyectiva y suprayectiva a la vez



__Ejemplos__

- $f(x)=x^3$ es inyectiva, es decir, no existen dos elementos del dominio con la misma imagen

  [Si $f(a)=f(b) \Rightarrow a^3=b^3 \Rightarrow a=b$]
- $f(x)=x^3$ es suprayectiva ya que $\text{Rec}(f)=\Re$
- $f(x)=x^3$ es biyectiva pues es inyectiva y suprayectiva a la vez.



$f(x)=x^3-3x^2+4$ no es inyectiva porque existen elementos del dominio con la misma imagen, por ejemplo, $f(0)=f(3)=4$

$f(x)=x^3-3x^2+4$ es suprayectiva porque $\text{Rec}(f)=\Re$

$f(x)=x^3-3x^2+4$ no es biyectiva porque, aunque sí es suprayectiva no es inyectiva.

5.2. FUNCIÓN INVERSA RESPECTO A LA COMPOSICIÓN

- Dada una función ***f*** se define la **función inversa de *f* respecto a la composición** y se denota por $f^{-1}(x)$ como aquella función (si existe) tal que: $\boxed{(f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x}$

Es decir, si hacemos actuar las funciones f y f^{-1} sucesivamente sobre un número real x lo deja igual.

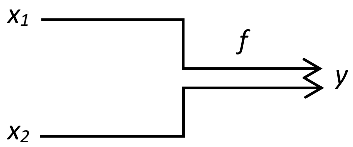
$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x) \xrightarrow{\quad f^{-1} \quad} x$$

$$x \xrightarrow{\quad f^{-1} \quad} f^{-1}(x) \xrightarrow{\quad f \quad} x$$

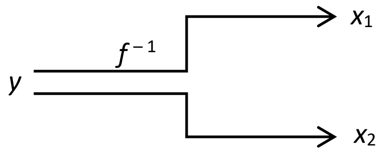
La inversa de la función f es aquella función que invierte $(x, f(x))$. Esto es, si la función f hace corresponder a un número real x el valor $f(x)$ entonces la función f^{-1} hace corresponder a $f(x)$ de nuevo x. En un lenguaje coloquial podríamos decir que: “ f^{-1} deshace lo que hace f ”

PARA QUE UNA FUNCIÓN TENGA INVERSA ES NECESARIO QUE SEA INYECTIVA.

Si la función f no es inyectiva, existen elementos del dominio con la misma imagen:

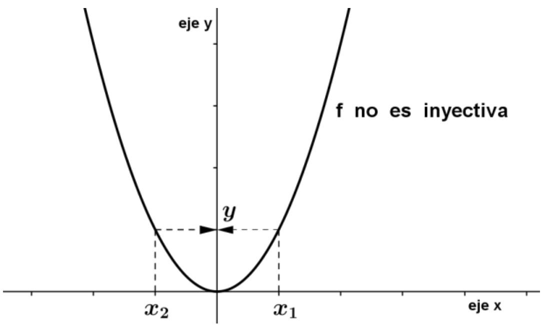


Pero entonces, la correspondencia inversa f^{-1} no es una función, ya que un mismo original (elemento del conjunto inicial) tiene más de una imagen (recuerda que para que una relación entre dos conjuntos sea una función a cada elemento del primer conjunto le tiene que corresponder un único elemento del segundo conjunto).

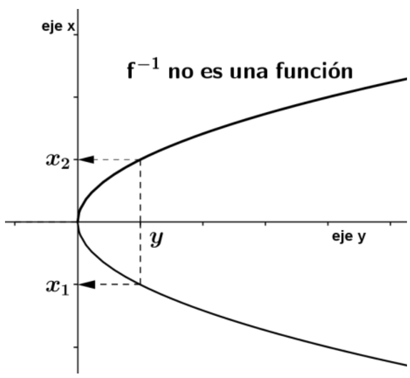


Veámoslo con un ejemplo concreto, la función $f(x) = x^2$.

$f(x)$ no es inyectiva porque existen elementos del dominio con la misma imagen, por ejemplo, $f(-1) = f(1) = 1$



Ahora invertimos los papeles de “x” e “y”. Es como si girásemos la gráfica 90º en sentido de las agujas del reloj.



Esta correspondencia no es una función, hay valores del conjunto de partida que tienen más de una imagen.

$$\begin{cases} f^{-1}(1) = 1 \\ f^{-1}(1) = -1 \end{cases}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

1) Sustituimos $f(x)$ por *y*.

2) Intercambiamos x e *y*.

3) Se busca la expresión que proporciona *y* en función de *x*. Esta expresión es la de la función inversa de f .

4) Sustituimos *y* por $f^{-1}(x)$.

Para comprobar si dos funciones son inversas tenemos que comprobar que se verifica la definición:

$$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x}$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta *y = x* (bisectriz del primer y tercer cuadrante)

Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = 2x + 4$ calcula $f^{-1}(x)$

- En primer lugar estudiamos si $f(x)$ es inyectiva, es decir, [si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$]

  $$f(a) = f(b) \Rightarrow 2a + 4 = 2b + 4 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

  Por tanto, $f(x)$ es inyectiva y existe $f^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $f^{-1}(x)$

  1) Sustituimos $f(x)$ por y $\rightarrow$ $f(x) = 2x + 4 \Rightarrow y = 2x + 4$

  2) Intercambiamos x e y $\rightarrow$ $x = 2y + 4$

  3) Operamos para despejar y en función de x

  $$x = 2y + 4 \Rightarrow x - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{x-4}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

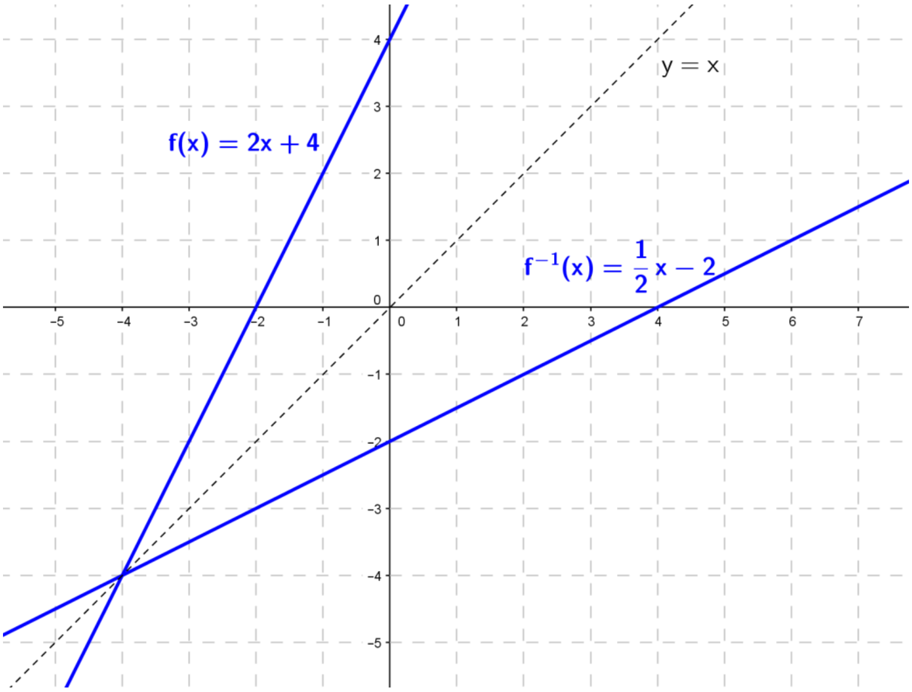
  4) Sustituimos y por $f^{-1}(x)$ $\rightarrow$ $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2}$

- COMPROBACIÓN

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{1}{2}x - 2\right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x - 4 + 4 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}\left[2x + 4\right] = \frac{1}{2} \cdot (2x + 4) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

- Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



Ejemplo 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ calcula f^{-1}

- En primer lugar estudiamos si $f(x)$ es inyectiva, es decir, [si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$]

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a - 1}{a + 3} = \frac{2b - 1}{b + 3} \Rightarrow (2a - 1) \cdot (b + 3) = (a + 3) \cdot (2b - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab + 6a - b - 3 = 2ab - a + 6b - 3 \Rightarrow 7a = 7b \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $f(x)$ es inyectiva y existe $f^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $f^{-1}(x)$

1) Sustituimos $f(x)$ por y $\rightarrow$ $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

2) Intercambiamos x e y $\rightarrow$ $x = \dfrac{2y - 1}{y + 3}$

3) Operamos para despejar y en función de x

$$x\cdot(y+3)=2y-1 \;\Rightarrow\; xy+3x=2y-1 \;\Rightarrow\; 3x+1=2y-xy \;\Rightarrow\; 3x+1=y\cdot(2-x) \;\Rightarrow\; y=\frac{3x+1}{2-x}$$

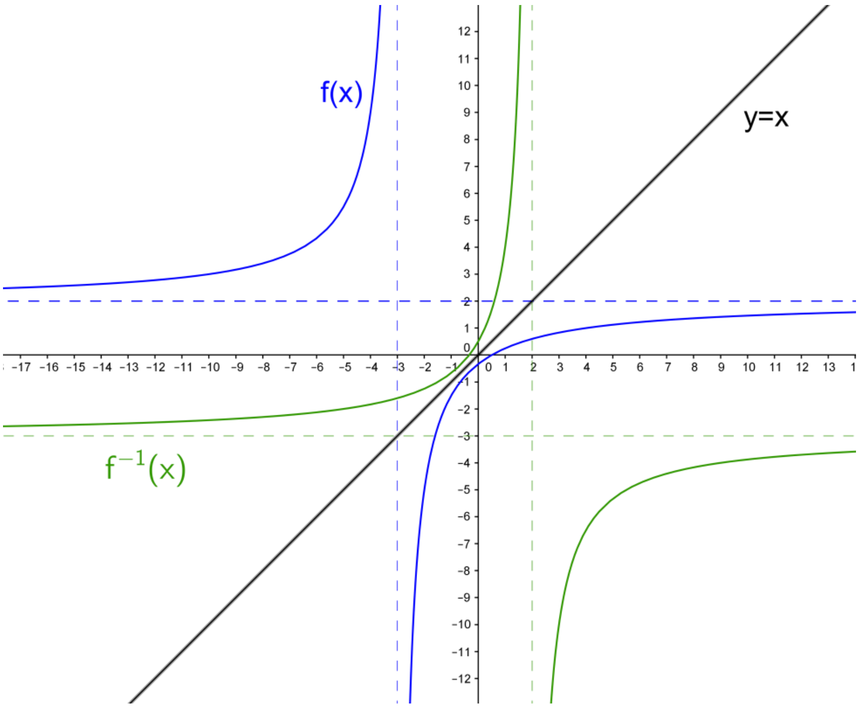
4) Sustituimos y por $f^{-1}(x)$ $\rightarrow$ $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

- COMPROBACIÓN

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\frac{3x+1}{2-x}\right]=\frac{2\cdot\dfrac{3x+1}{2-x}-1}{\dfrac{3x+1}{2-x}+3}=\frac{\dfrac{6x+2}{2-x}-1}{\dfrac{3x+1+6-3x}{2-x}}=\frac{6x+2-2+x}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=f^{-1}\left[\frac{2x-1}{x+3}\right]=\frac{3\cdot\dfrac{2x-1}{x+3}+1}{2-\dfrac{2x-1}{x+3}}=\frac{\dfrac{6x-3}{x+3}+1}{\dfrac{2x+6-2x+1}{x+1}}=\frac{6x-3+x+3}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$\text{Dom}(f)=\Re-\{-3\}$ $\text{Rec}(f)=\Re-\{2\}$

$\text{Dom}(f^{-1})=\Re-\{2\}$ $\text{Rec}(f^{-1})=\Re-\{-3\}$

Ejemplo 3

Dada la función $g(x)=x^2-6$ calcula g^{-1}

- En primer lugar estudiamos si $g(x)$ es inyectiva, es decir, [si $g(a)=g(b)\Rightarrow a=b$]

$$g(a)=g(b)\Rightarrow a^2-6=b^2-6\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=\pm b$$

  Por tanto, $g(x)$ NO es inyectiva

  En consecuencia, no existe la función $g^{-1}(x)$ (aunque existe la correspondencia inversa $g^{-1}(x)$ no es una función).

- Lo que haremos será restringir el dominio de $g(x)$ a un conjunto en el que sí sea una función inyectiva y, por tanto, sí exista la función $g^{-1}(x)$.

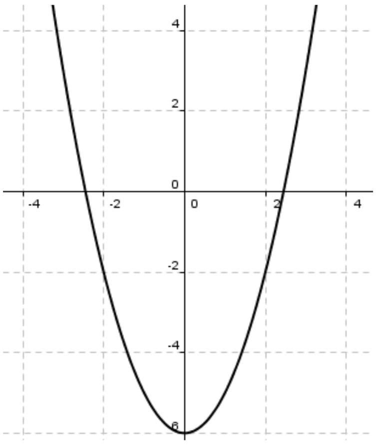
$g(x)=x^2-6$

1) $a=1>0\Rightarrow\cup$ cóncava hacia arriba

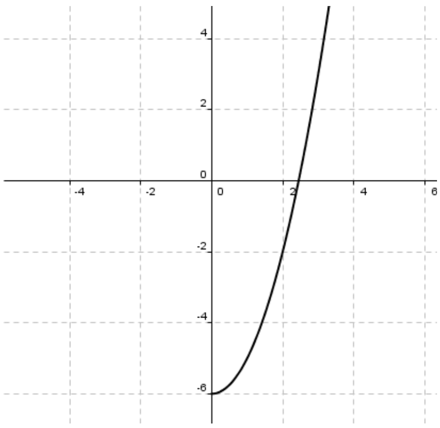
2) Vértice $(0,-6)$

3) Tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	-2	-5	-6	-5	-2	3



Restringimos $g(x)=x^2-6$ al conjunto $[0,+\infty)$



- Ahora calculamos $g^{-1}(x)$

1) $g(x)=x^2-6 \quad\Rightarrow\quad y=x^2-6$

2) $x=y^2-6 \quad\Rightarrow\quad y^2=x+6$

3) $y=\sqrt{x+6}$

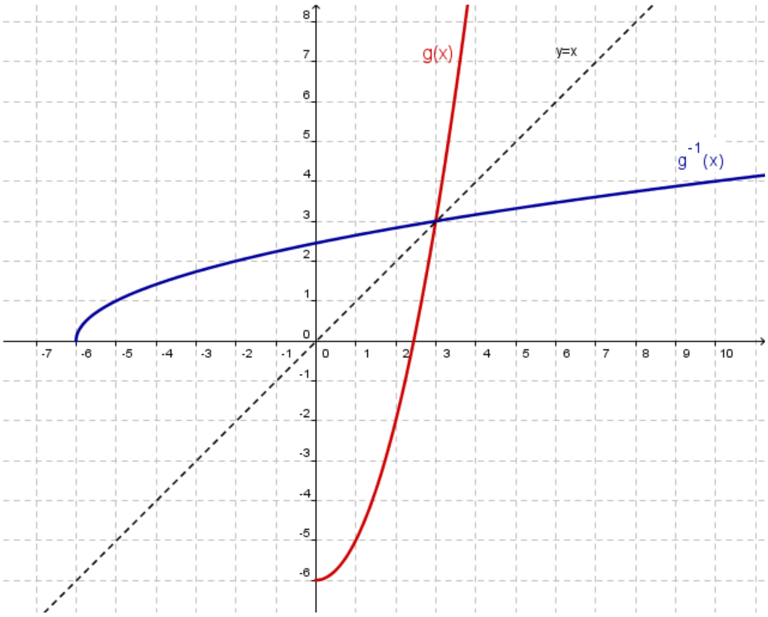
4) $g^{-1}(x)=\sqrt{x+6}$ con $x\in[-6,+\infty)$

- COMPROBACIÓN

$$(g \circ g^{-1})(x) = g\left[g^{-1}(x)\right] = (\sqrt{x+6})^2 - 6 = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}\left[g(x)\right] = \sqrt{x^2 - 6 + 6} = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$\text{Dom}(g) = [0, +\infty)$ $\text{Rec}(g) = [-6, +\infty)$

$\text{Dom}(g^{-1}) = [-6, +\infty)$ $\text{Rec}(g^{-1}) = [0, +\infty)$

$f(x) = 2x + 4$

x	0	1	2	-1	-2
y	4	6	8	2	0

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

x	4	6	8	2	0
y	0	1	2	-1	-2