Ejercicio 1

Dadas $f(x)=1-x^2$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $g(x)=\sqrt{4-2x}$ calcula las funciones siguientes y halla su dominio.

a) $(f\circ f)(x)$ b) $(h\circ g)(x)$ c) $(g\circ f)(x)$ d) $(f\circ h\circ g)(x)$

Solución

- $f(x)=1-x^2 \ \rightarrow\ \text{Dom}(f)=\Re$
- $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \ \rightarrow\ \text{Dom}(g)=\Re-\{-2,2\}$
- $g(x)=\sqrt{4-2x} \ \rightarrow\ \text{Dom}(g)=\left\{x\in\Re \,/\, 4-2x\geq 0\right\}=(-\infty\ ,\ 2]$

  $4-2x\geq 0 \ \Rightarrow\ -2x\geq -4 \ \Rightarrow\ x\leq 2$

a) $(f\circ f)(x)$ **"*f* compuesta con *f* "**

- $(f\circ f)(x)= f[1-x^2]=1-(1-x^2)^2=1-1+2x^2-x^4 \ \Rightarrow\ \boxed{(f\circ f)(x)=-x^4+2x^2}$
- $\text{Dom}(f\circ f)=\{x\in\text{Dom}(f)\,/\,f(x)\in\text{Dom}(f)\}$

  $\text{Dom}(f\circ f)=\left\{x\in\Re\,/\,1-x^2\in\Re\right\}=\Re \ \Rightarrow\ \boxed{\text{Dom}(f\circ f)=\Re}$

  $1-x^2\in\Re\ \ \forall\ x\in\Re$

b) $(h\circ g)(x)$ **"*g* compuesta con *h* "**

- $(h\circ g)(x)=h[\sqrt{4-2x}]=\dfrac{1}{(\sqrt{4-2x})^2-4}=\dfrac{1}{4-2x-4}=\dfrac{1}{-2x}=-\dfrac{1}{2x} \ \Rightarrow\ \boxed{(h\circ g)(x)=-\dfrac{1}{2x}}$
- $\text{Dom}(h\circ g)=\{x\in\text{Dom}(g)\,/\,g(x)\in\text{Dom}(h)\}$

  $\text{Dom}(h\circ g)=\left\{x\in(-\infty,2]\,/\,\sqrt{4-2x}\in\Re-\{-2,2\}\right\}=(-\infty,2]-\{0\} \ \Rightarrow\ \boxed{\text{Dom}(h\circ g)=(-\infty,2]-\{0\}}$

  $\sqrt{4-2x}=2 \ \Rightarrow\ 4-2x=4 \ \Rightarrow\ x=0$

  $\sqrt{4-2x}=-2 \ \Rightarrow\ \nexists$ solución en $\Re$

c) $(g\circ f)(x)$ **"*f* compuesta con *g*"**

- $(g\circ f)(x)=g[1-x^2]=\sqrt{4-2(1-x^2)}=\sqrt{4-2+2x^2}=\sqrt{2x^2+2} \ \Rightarrow\ \boxed{(g\circ f)(x)=\sqrt{2x^2+2}}$
- $\text{Dom}(g\circ f)=\{x\in\text{Dom}(f)\,/\,f(x)\in\text{Dom}(g)\}$

  $\text{Dom}(g\circ f)=\left\{x\in\Re\,/\,1-x^2\in(-\infty,2]\right\}=\Re \ \Rightarrow\ \boxed{\text{Dom}(h\circ g)=\Re}$

  $1-x^2\leq 2 \ \Rightarrow\ -x^2-1\leq 0 \ \xrightarrow{\cdot(-1)}\ x^2+1\geq 0 \ \Rightarrow\ x\in\Re$

d) $(f\circ h\circ g)(x)$

- $(f\circ h\circ g)(x)=\big(f\circ(h\circ g)\big)(x)=f\left[h\circ g)(x)\right]=f\left(-\frac{1}{2x}\right)=1-\left(-\frac{1}{2x}\right)^2=1-\frac{1}{4x^2}\quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \boxed{(f\circ h\circ g)(x)=1-\frac{1}{4x^2}}$

Por el apartado b) sabemos que $(h\circ g)(x)=-\frac{1}{2x}$ y $\text{Dom}(h\circ g)=(-\infty\,,2]-\{\,0\,\}$

- $\text{Dom}(f\circ h\circ g)=\text{Dom}\big(f\circ(h\circ g)\big)=\{x\in\text{Dom}(h\circ g)\,/\,(h\circ g)(x)\in\text{Dom}(f)\}$

$\text{Dom}(f\circ h\circ g)=\left\{x\in(-\infty\,,\;2]-\{0\}\,/\,-\frac{1}{2x}\in\Re\right\}=(-\infty\,,\;2]-\{0\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\text{Dom}(f\circ h\circ g)=(-\infty\,,\;2]-\{0\}}$

$-\frac{1}{2x}\in\Re\quad\forall\,x\in(-\infty\,,\;2]-\{\,0\,\}$

Ejercicio 2

Dadas $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $g(x)=x-4$, $h(x)=\sqrt{x-3}$ y $k(x)=x^2+1$ calcula las funciones siguientes y halla su dominio.

a) $(k\circ h)(x)$ c) $(h\circ g)(x)$ e) $(f\circ g)(x)$ g) $(f\circ g\circ h)(x)$

b) $(g\circ f)(x)$ d) $(g\circ h)(x)$ f) $(f\circ k)(x)$

__**Solución**__

- $f(x)=\frac{x-1}{x+2}\;\rightarrow\;\text{Dom}(f)=\Re-\{-2\}$
- $g(x)=x-4\;\rightarrow\;\text{Dom}(g)=\Re$
- $h(x)=\sqrt{x-3}\;\rightarrow\;\text{Dom}(h)=[3,+\infty)$
- $k(x)=x^2+1\;\rightarrow\;\text{Dom}(k)=\Re$

a) $(k\circ h)(x)$ **“*h* compuesta con *k*”**

- $(k\circ h)(x)=k[\sqrt{x-3}]=(\sqrt{x-3})^2+1=x-3+1=x-2\quad\Rightarrow\quad\boxed{(k\circ h)(x)=x-2}$
- $\text{Dom}(k\circ h)=\{x\in\text{Dom}(h)\,/\,h(x)\in\text{Dom}(k)\}$

$\text{Dom}(k\circ h)=\left\{x\in[\,3,+\infty)\,/\,\sqrt{x-3}\in\Re\right\}=[\,3,+\infty)\quad\Rightarrow\quad\boxed{\text{Dom}(k\circ h)=[\,3,+\infty)}$

$\sqrt{x-3}\in\Re\;\;\forall\,x\in[\,3,+\infty)$

b) $(g \circ f)(x)$ **"*f* compuesta con *g*"**

- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\dfrac{x-1}{x+2}\right] = \dfrac{x-1}{x+2} - 4 = \dfrac{x-1-4(x+2)}{x+2} = \dfrac{x-1-4x-8}{x+2} = \dfrac{-3x-9}{x+2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{(g \circ f)(x) = \dfrac{-3x-9}{x+2}}$

- $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) \,/\, f(x) \in \text{Dom}(g)\}$

  $\text{Dom}(g \circ f) = \left\{x \in \Re - \{-2\} \,/\, \dfrac{x-1}{x+2} \in \Re\right\} = \Re - \{-2\} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(g \circ f) = \Re - \{-2\}}$

  $\dfrac{x-1}{x+2} \in \Re \;\; \forall\, x \in \Re - \{-2\}$

c) $(h \circ g)(x)$ **"*g* compuesta con *h*"**

- $(h \circ g)(x) = h[x-4] = \sqrt{(x-4)-3} = \sqrt{x-7} \quad \Rightarrow \boxed{(h \circ g)(x) = \sqrt{x-7}}$

- $\text{Dom}(h \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \,/\, g(x) \in \text{Dom}(h)\}$

  $\text{Dom}(h \circ g) = \left\{x \in \Re \,/\, x-4 \in [3, +\infty)\right\} = [7, +\infty) \quad \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(h \circ g) = [7, +\infty)}$

  $x - 4 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \geq 7$

d) $(g \circ h)(x)$ **"*h* compuesta con *g*"**

- $(g \circ h)(x) = g[\sqrt{x-3}] = \sqrt{x-3} - 4 \quad \Rightarrow \boxed{(g \circ h)(x) = \sqrt{x-3} - 4}$

- $\text{Dom}(g \circ h) = \{x \in \text{Dom}(h) \,/\, h(x) \in \text{Dom}(g)\}$

  $\text{Dom}(g \circ h) = \left\{x \in [3, +\infty) \,/\, \sqrt{x-3} \in \Re\right\} = [3, +\infty) \quad \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(g \circ h) = [3, +\infty)}$

  $\sqrt{x-3} \in \Re \;\; \forall\, x \in [3, +\infty)$

e) $(f \circ g)(x)$ **"*g* compuesta con *f*"**

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x-4] = \dfrac{(x-4)-1}{(x-4)+2} = \dfrac{x-4-1}{x-4+2} = \dfrac{x-5}{x-2} \quad \Rightarrow \boxed{(f \circ g)(x) = \dfrac{x-5}{x-2}}$

- $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \,/\, g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

  $\text{Dom}(f \circ g) = \left\{x \in \Re \,/\, x-4 \in \Re - \{-2\}\right\} = \Re - \{2\} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(g \circ f) = \Re - \{2\}}$

  $x - 4 \neq -2 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$

f) $(f \circ k)(x)$ **"*k* compuesta con *f*"**

- $(f \circ k)(x) = f[x^2+1] = \dfrac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)+2} = \dfrac{x^2}{x^2+3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(f \circ k)(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}}$

- $\text{Dom}(f \circ k) = \{x \in \text{Dom}(k) \,/\, k(x) \in \text{Dom}(f)\}$

  $\text{Dom}(f \circ k) = \left\{ x \in \Re \,/\, x^2+1 \in \Re - \{-2\} \right\} = \Re \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Dom}(f \circ k) = \Re}$

  $x^2+1=-2 \quad \Rightarrow \quad x^2=-3 \quad \Rightarrow \quad$ no tiene solución

g) $(f \circ g \circ h)(x)$

- $(f \circ g \circ h)(x) = \big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\left[(g \circ h)(x)\right] = f\left[\sqrt{x-3}-4\right] = \dfrac{\sqrt{x-3}-4-1}{\sqrt{x-3}-4+2} = \dfrac{\sqrt{x-3}-5}{\sqrt{x-3}-2} \quad \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{(f \circ g \circ h)(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}-5}{\sqrt{x-3}-2}}$

- $\text{Dom}(f \circ g \circ h) = \text{Dom}\big(f \circ (g \circ h)\big) = \{x \in \text{Dom}(g \circ h) \,/\, (g \circ h)(x) \in \text{Dom}(f)\}$

  $\text{Dom}(f \circ g \circ h) = \left\{ x \in [\,3\,,\ +\infty) \,/\, \sqrt{x-3}-4 \in \Re - \{-2\} \right\} = [\,3\,,\ +\infty) - \{7\}$

  $\sqrt{x-3}-4 \neq -2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-3} \neq 2 \quad \Rightarrow \quad x-3 \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 7$

  Por tanto, $\boxed{\text{Dom}(f \circ g \circ h) = [\,3\,,\ +\infty) - \{7\}}$