Calcula la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$ b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$ c) $g(x)=\sqrt{x^3-1}$

<u>Solución</u>

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$

- Primero estudiamos si $f(x)$ es inyectiva, es decir, [si $f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$]

  $$f(a)=f(b) \Rightarrow \frac{2a+1}{3}=\frac{2b+1}{3} \Rightarrow 2a+1=2b+1 \Rightarrow 2a=2b \Rightarrow a=b$$

  Luego $f(x)$ es inyectiva y existe $f^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $f^{-1}(x)$

  1) Sustituimos $f(x)$ por y $\rightarrow$ $f(x)=\dfrac{2x+1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{2x+1}{3}$

  2) Intercambiamos x e y $\rightarrow$ $x=\dfrac{2y+1}{3}$

  3) Operamos para despejar y en función de x

  $$x=\frac{2y+1}{3} \Rightarrow 3x=2y+1 \Rightarrow 3x-1=2y \Rightarrow y=\frac{3x-1}{2}$$

  4) Sustituimos y por $f^{-1}(x)$ $\rightarrow$ $\boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2}}$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left[\frac{3x-1}{2}\right]=\frac{2\cdot\left(\frac{3x-1}{2}\right)+1}{3}=\frac{3x-1+1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

  $$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=f^{-1}\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{3\cdot\left(\frac{2x+1}{3}\right)-1}{2}=\frac{2x+1-1}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

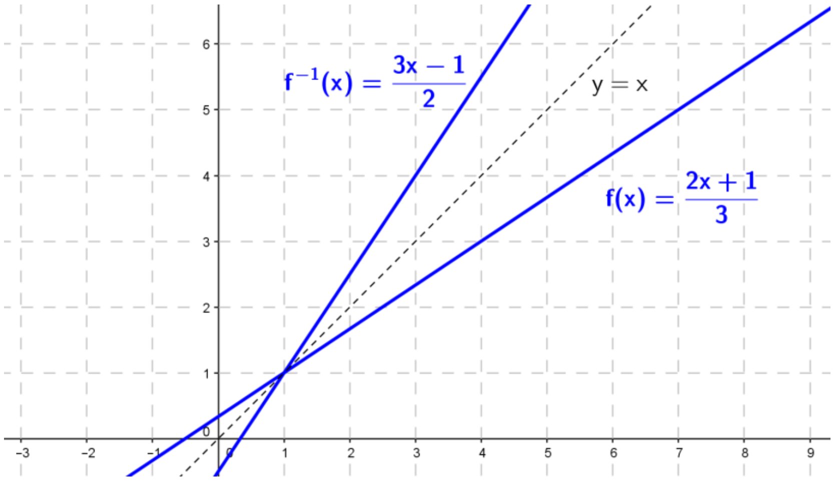
- Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$

$f(x)=\dfrac{2x+1}{3}$

x	1	4	-2	7
y	1	3	-1	5

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2}$

x	1	3	-1	5
y	1	4	-2	7



b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

- Primero estudiamos si $f(x)$ es inyectiva, es decir, [si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$]

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a-3}{3a+1} = \frac{2b-3}{3b+1} \Rightarrow (2a-3)\cdot(3b+1) = (2b-3)\cdot(3a+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6ab + 2a - 9b - 3 = 6ab + 2b - 9a - 3 \Rightarrow 11a = 11b \Rightarrow a = b$$

Luego, $f(x)$ es inyectiva y existe $f^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $f^{-1}(x)$

1) Sustituimos $f(x)$ por y $\rightarrow$ $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1} \Rightarrow y = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

2) Intercambiamos x e y $\rightarrow$ $x = \dfrac{2y-3}{3y+1}$

3) Operamos para despejar y en función de x

$$x\cdot(3y+1) = 2y-3 \Rightarrow 3xy + x = 2y - 3 \Rightarrow x + 3 = 2y - 3xy \Rightarrow x + 3 = y\cdot(2-3x) \Rightarrow y = \frac{x+3}{2-3x}$$

4) Sustituimos y por $f^{-1}(x)$ $\rightarrow$ $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2-3x}}$

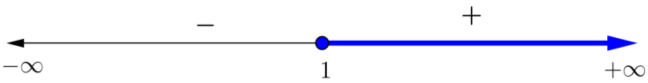
- COMPROBACIÓN

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{x+3}{2-3x}\right] = \frac{2\cdot\left(\dfrac{x+3}{2-3x}\right) - 3}{3\cdot\left(\dfrac{x+3}{2-3x}\right) + 1} = \frac{\dfrac{2x+6}{2-3x} - 3}{\dfrac{3x+9}{2-3x} + 1} = \frac{\dfrac{2x+6-6+9x}{2-3x}}{\dfrac{3x+9+2-3x}{2-3x}} = \frac{11x}{11} = x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}\left[\frac{2x-3}{3x+1}\right]=\frac{\dfrac{2x-3}{3x+1}+3}{2-3\cdot\left(\dfrac{2x-3}{3x+1}\right)}=\frac{\dfrac{2x-3+9x+3}{3x+1}}{2-\dfrac{6x-9}{3x+1}}=\frac{\dfrac{11x}{3x+1}}{\dfrac{6x+2-6x+9}{3x+1}}=\frac{11x}{11}=x$$

c) $g(x)=\sqrt{x^3-1}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(g)=[1,+\infty)$ $\quad$ $\mathrm{Rec}(g)=[0,+\infty)$

$x^3-1\geq 0$



<u>Ceros</u> $x^3-1=0 \;\Rightarrow\; x^3=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=1}$

- Primero estudiamos si $g(x)$ es inyectiva, es decir, [si $g(a)=g(b) \Rightarrow a=b$]

  $g(a)=g(b) \;\Rightarrow\; \sqrt{a^3-1}=\sqrt{b^3-1} \;\Rightarrow\; a^3-1=b^3-1 \;\Rightarrow\; a^3=b^3 \;\Rightarrow\; a=b$

  Luego, $g(x)$ es inyectiva y existe $g^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $g^{-1}(x)$

  1) Sustituimos $g(x)$ por y $\rightarrow$ $g(x)=\sqrt{x^3-1} \;\Rightarrow\; y=\sqrt{x^3-1}$

  2) Intercambiamos x e y $\rightarrow$ $x=\sqrt{y^3-1}$

  3) Operamos para despejar y en función de x

     $x=\sqrt{y^3-1} \;\Rightarrow\; x^2=y^3-1 \;\Rightarrow\; x^2+1=y^3 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x^2+1}=y \;\Rightarrow\; y=\sqrt[3]{x^2+1}$

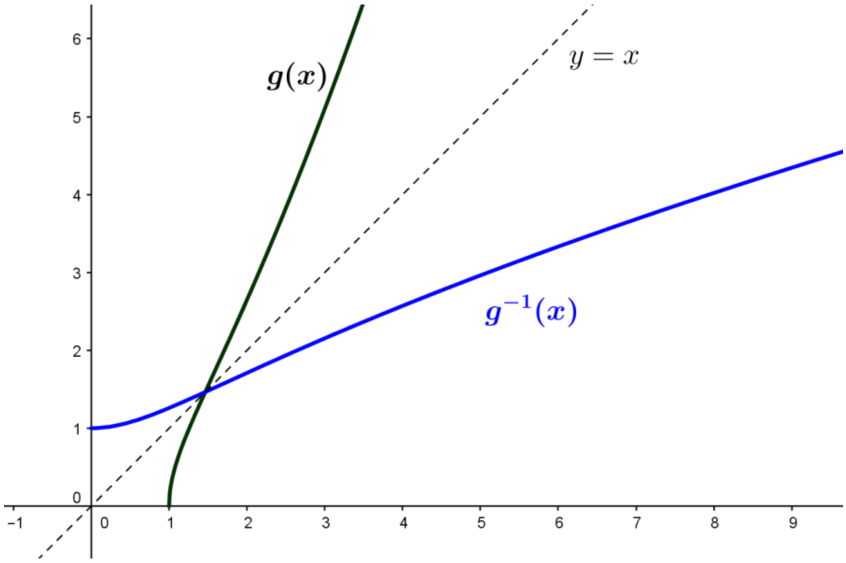
  4) Sustituimos y por $g^{-1}(x)$ $\rightarrow$ $\boxed{g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1}}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(g^{-1})=\mathrm{Rec}(g)=[0,+\infty)$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $(g\circ g^{-1})(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left[\sqrt[3]{x^2+1}\right]=\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1}=\sqrt{x^2+1-1}=\sqrt{x^2}=x$

  $(g^{-1}\circ g)(x)=g^{-1}[g(x)]=g^{-1}\left[\sqrt{x^3-1}\right]=\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2+1}=\sqrt[3]{x^3-1+1}=\sqrt[3]{x^3}=x$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$\text{Dom}(g) = [1, +\infty)$ $\text{Rec}(g) = [0, +\infty)$

$\text{Dom}(g^{-1}) = \text{Rec}(g) = [0, +\infty)$ $\text{Rec}(g^{-1}) = \text{Dom}(g) = [1, +\infty)$