Dadas las siguientes funciones efectúa las operaciones que se indican, calculando en cada caso el dominio de la función resultante:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ $\quad g(x)=x^2-6$ $\quad h(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}$ $\quad p(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad j(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$k(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ $\quad l(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ $\quad m(x)=x-4$ $\quad s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$ $\quad r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

$$\tilde{n}(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ x+6 & si \quad -1\le x\le 2 \\ \dfrac{1+x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases} \qquad n(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x-2} & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

a) $f+g$
b) $j+k$
c) $p+l$
d) $j-r$
e) $j-s$
f) $h\cdot k$
g) $j\cdot s$
h) l/m
i) k/s
j) f/s
k) g/p
l) $n+\tilde{n}$
m) $n\cdot\tilde{n}$
n) $f\circ m$
o) $m\circ j$
p) $p\circ r$
q) $p\circ j$
r) $s\circ p$
s) $g\circ m$
t) $r\circ s$
u) m^{-1}
v) j^{-1}
w) r^{-1}
x) s^{-1}
y) p^{-1}
z) g^{-1}

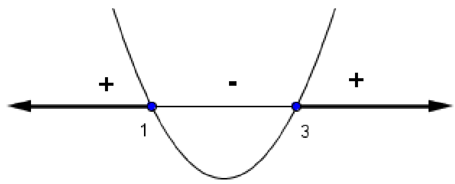
En primer lugar hallamos el dominio de todas las funciones

- $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-2,-2\}$
- $g(x)=x^2-6 \rightarrow Dom(g)=\Re$
- $h(x)=\dfrac{6x}{x^2-4} \rightarrow Dom(h)=\Re-\{-2,2\}$
- $p(x)=\sqrt{x+1} \rightarrow Dom(p)=\{x\in\Re \,/\, x+1\ge 0\}=[-1,+\infty)$
- $j(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow Dom(j)=\Re-\{-1\}$
- $k(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1} \rightarrow Dom(k)=\Re-\{-1,1\}$
- $l(x)=\sqrt{x^2-4x+3} \rightarrow Dom(l)=\{x\in\Re \,/\, x^2-4x+3\ge 0\}=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

  Tenemos que resolver la inecuación: $x^2-4x+3\ge 0$

  <u>Ceros</u>

  $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ò $x=3$



- $m(x)=x-4 \rightarrow Dom(m)=\Re$

- $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1} \rightarrow Dom(s)=\Re-\{1\}$
- $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3} \rightarrow Dom(r)=\Re-\{-3\}$
- $\tilde{n}(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ x+6 & si \quad -1\le x\le 2 \\ \dfrac{1+x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases} \rightarrow Dom(\tilde{n})=\Re$
- $n(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x-2} & si \quad x\ge 0 \end{cases} \rightarrow Dom(n)=\Re-\{2\}$

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}+(x^2-6)=\dfrac{1+(x^2-4)(x^2-6)}{x^2-4}=\dfrac{1+x^4-6x^2-4x^2+24}{x^2-4}=\dfrac{x^4-10x^2+25}{x^2-4}$

- Por tanto, $(f+g)(x)=\dfrac{x^4-10x^2+25}{x^2-4}$
- $Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)=(\Re-\{-2,2\})\cap\Re=\Re-\{-2,2\}$

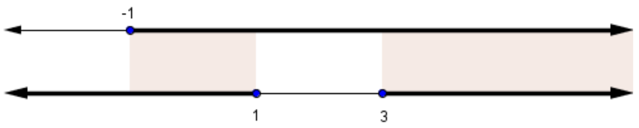
b) $(j+k)(x)=j(x)+k(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(x-1)^2+x+2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2-2x+1+x+2}{x^2-1}=$

$=\dfrac{x^2-x+3}{x^2-1}$

- Por tanto, $(j+k)(x)=\dfrac{x^2-x+3}{x^2-1}$
- $Dom(j+k)=Dom(j)\cap Dom(k)=(\Re-\{-1\})\cap(\Re-\{-1,1\})=\Re-\{-1,1\}$

c) $(p+l)(x)=p(x)+l(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4x+3}$

- Por tanto, $(p+l)(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4x+3}$
- $Dom(p+l)=Dom(p)\cap Dom(l)=[-1,+\infty)\cap\big((-\infty,1]\cup[3,+\infty)\big)=[-1,1]\cup[3,+\infty)$



d) $(j-r)(x)=j(x)-r(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{(x-1)(x+3)-(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{x^2+3x-x-3-2x^2+x-2x+1}{(x+1)(x+3)}=$

$=\dfrac{-x^2+x-2}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{-x^2+x-2}{x^2+4x+3}$

- Por tanto, $(j-r)(x)=\dfrac{-x^2+x-2}{x^2+4x+3}$
- $Dom(j-r)=Dom(j)\cap Dom(r)=(\Re-\{-1\})\cap(\Re-\{-3\})=\Re-\{-3,-1\}$

e) $(j-s)(x)=j(x)-s(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2-(x+1)(3-x)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2-2x+1-3x+x^2-3+x}{x^2-1}=$

$=\dfrac{2x^2-4x-2}{x^2-1}$

- Por tanto, $(j-s)(x)=\dfrac{2x^2-4x-2}{x^2-1}$
- $Dom(j-s)=Dom(j)\cap Dom(s)=(\Re-\{-1\})\cap(\Re-\{1\})=\Re-\{-1,1\}$

f) $(h\cdot k)(x)=h(x)\cdot k(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{6x\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x^2-1)}=\dfrac{6x}{(x-2)(x^2-1)}=\dfrac{6x}{x^3-2x^2-x+2}$

- Por tanto, $(h\cdot k)(x)=\dfrac{6x}{x^3-2x^2-x+2}$
- $Dom(h\cdot k)=Dom(h)\cap Dom(k)=(\Re-\{-2,2\})\cap(\Re-\{-1,1)=\Re-\{-2,-1,1,2\}$

g) $(j\cdot s)(x)=j(x)\cdot s(x)=\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{3-x}{x+1}$

- Por tanto, $(j\cdot s)(x)=\dfrac{3-x}{x+1}$
- $Dom(j\cdot s)=Dom(j)\cap Dom(s)=(\Re-\{-1\})\cap(\Re-\{1\})=\Re-\{-1,1\}$

h) $(l/m)(x)=\dfrac{l(x)}{m(x)}=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-4}$

- Por tanto, $(l/m)(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-4}$
- $Dom(l/m)=[Dom(l)\cap Dom(m)]-\{x/m(x)=0\}=(-\infty,1]\cup[3,4)\cup(4,+\infty)$
  - ✓ $Dom(l)=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$
  - ✓ $Dom(m)=\Re$
  - ✓ $m(x)=0\Leftrightarrow x-4=0\Leftrightarrow x=4$

i) $(k/s)(x)=\dfrac{k(x)}{s(x)}=\dfrac{x+2}{x^2-1}:\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)(3-x)}=\dfrac{x+2}{(x+1)(3-x)}=\dfrac{x+2}{3x-x^2+3-x}=\dfrac{x+2}{-x^2+2x+3}$

- Por tanto, $(k/s)(x)=\dfrac{x+2}{-x^2+2x+3}$
- $Dom(k/s)=[Dom(k)\cap Dom(s)]-\{x/s(x)=0\}=[\Re-\{-1,1\}\cap\Re-\{1\}]-\{3\}=\Re-\{-1,1,3\}$
  - ✓ $Dom(k)=\Re-\{-1,1\}$
  - ✓ $Dom(s)=\Re-\{1\}$
  - ✓ $s(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3-x}{x-1}=0\Leftrightarrow x=3$

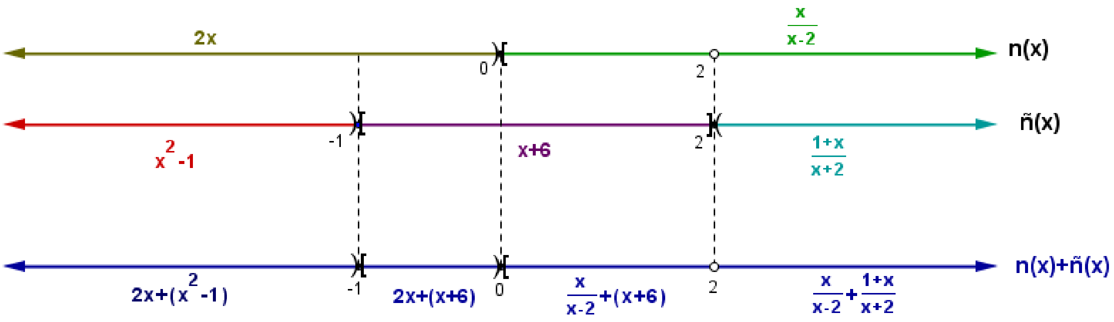
j) $(f/s)(x)=\dfrac{f(x)}{s(x)}=\dfrac{1}{x^2-4}:\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{x-1}{(3-x)(x^2-4)}=\dfrac{x-1}{-x^3+3x^2+4x-12}$

- Por tanto, $(f/s)(x)=\dfrac{x-1}{-x^3+3x^2+4x-12}$
- $Dom(f/s)=[Dom(f)\cap Dom(s)]-\{x/s(x)=0\}=[\Re-\{-2,2\}\cap\Re-\{1\}]-\{3\}=\Re-\{-2,1,2,3\}$
  - ✓ $Dom(f)=\Re-\{-2,2\}$
  - ✓ $Dom(s)=\Re-\{1\}$
  - ✓ $s(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3-x}{x-1}=0\Leftrightarrow x=3$

k) $(g/p)(x)=\dfrac{g(x)}{p(x)}=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{x-1}}$

- Por tanto, $(g/p)(x)=\dfrac{x^2-6}{\sqrt{x-1}}$
- $Dom(g/p)=[Dom(g)\cap Dom(p)]-\{x/p(x)=0\}=[\Re\cap[1,+\infty)]-\{1\}=(1,+\infty)$
  - ✓ $Dom(g)=\Re$
  - ✓ $Dom(p)=[1,+\infty)$
  - ✓ $p(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x=1$

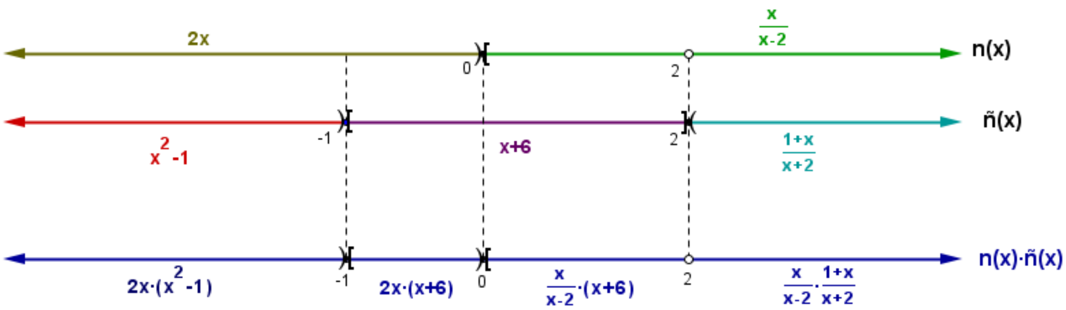
l) $(n+ñ)(x)=\begin{cases} 2x+(x^2-1) & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x+(x+6) & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \dfrac{x}{x-2}+(x+6) & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1+x}{x+2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases} = \quad = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 3x+6 & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \dfrac{x^2+5x-12}{x-2} & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{2x^2+x-2}{x-2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$



- Por tanto, $(n+ñ)(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 3x+6 & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \dfrac{x^2+5x-12}{x-2} & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{2x^2+x-2}{x-2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

- $Dom(n+ñ)=\Re\cap(\Re-\{2\})=\Re-\{2\}$

m) $(n\cdot ñ)(x)=\begin{cases} 2x\cdot(x^2-1) & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x\cdot(x+6) & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \dfrac{x}{x-2}\cdot(x+6) & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{x}{x-2}\cdot\dfrac{1+x}{x+2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases} = \begin{cases} 2x^3-2x & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x^2+12x & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ \dfrac{x^2+6x}{x-2} & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{x^2+x}{x^2-4} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$



- Por tanto, $(n \cdot ñ)(x) = \begin{cases} 2x^3 - 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x^2 + 12x & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2} & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

- $Dom(n \cdot ñ) = \Re \cap \left(\Re - \{2\}\right) = \Re - \{2\}$

n) $(f \circ m)(x) = f[m(x)] = f[x-4] = \dfrac{1}{(x-4)^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12}$

$Dom(f \circ m) = \{x \in Dom(m) / m(x) \in Dom(f)\} = \{x \in \Re / x - 4 \in \Re - \{-2, 2\}\} = \Re - \{2, 6\}$

$x - 4 \neq -2 \Leftrightarrow x \neq 2$

$x - 4 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 6$

o) $(m \circ j)(x) = m[j(x)] = m\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right] = \dfrac{x-1}{x+1} - 4 = \dfrac{x - 1 - 4x - 4}{x+1} = \dfrac{-3x - 5}{x+1}$

$Dom(m \circ j) = \{x \in Dom(j) / j(x) \in Dom(m)\} = \left\{x \in \Re - \{-1\} / \dfrac{x-1}{x+1} \in \Re\right\} = \Re - \{-1\}$

$\dfrac{x-1}{x+1} \in \Re \quad \forall\, x \in \Re - \{-1\}$

p) $(p \circ r)(x) = p[r(x)] = p\left[\dfrac{2x-1}{x+3}\right] = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3} + 1} = \sqrt{\dfrac{2x - 1 + x + 3}{x+3}} = \sqrt{\dfrac{3x+2}{x+3}}$

$Dom(p \circ r) = \{x \in Dom(r) / r(x) \in Dom(p)\} = \left\{x \in \Re - \{-3\} / \dfrac{2x-1}{x+3} \in [-1, +\infty)\right\} = (-\infty, -3) \cup \left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

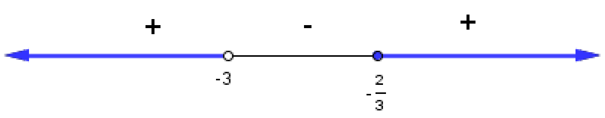
$\dfrac{2x-1}{x+3} \ge -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+3} + 1 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x+3} \ge 0$

Ceros

$3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

Polos

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$



q) $(p\circ j)(x)=p[j(x)]=p\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=\sqrt{\dfrac{x-1+x+1}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$

$Dom(p\circ j)=\{x\in Dom(j)/\ j(x)\in Dom(p)\}=\{x\in\Re-\{-1\}/\dfrac{x-1}{x+1}\in[-1,+\infty)\}=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

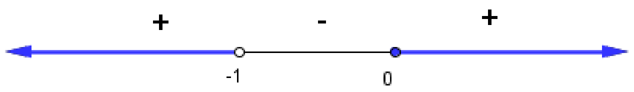
$\dfrac{x-1}{x+1}\geq -1\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}+1\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1}\geq 0$

Ceros

$2x=0\Rightarrow x=0$

Polos

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$



r) $(s\circ p)(x)=s[p(x)]=s[\sqrt{x+1}]=\dfrac{3-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$

$Dom(s\circ p)=\{x\in Dom(p)/\ p(x)\in Dom(s)\}=\left\{x\in[-1,+\infty)/\sqrt{x+1}\in\Re-\{1\}\right\}=[-1,0)\cup(0,+\infty)$

$\sqrt{x+1}\neq 1\Leftrightarrow x+1\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$

s) $(g\circ m)(x)=g[m(x)]=g[x-4]=(x-4)^2-6=x^2-8x+10$

$Dom(g\circ m)=\{x\in Dom(m)/m(x)\in Dom(g)\}=\{x\in\Re/x-4\in\Re\}=\Re$

t) $(r\circ s)(x)=r[s(x)]=r\left[\dfrac{3-x}{x-1}\right]=\dfrac{2\left(\dfrac{3-x}{x-1}\right)^2-1}{\dfrac{3-x}{x-1}+3}=\dfrac{\dfrac{6-2x}{x-1}-1}{\dfrac{3-x+3x-3}{x-1}}=\dfrac{\dfrac{6-2x-x+1}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1}}=\dfrac{-3x+7}{2x}$

$Dom(r\circ s)=\{x\in Dom(s)/\ s(x)\in Dom(r)\}=\left\{x\in\Re-\{1\}/\dfrac{3-x}{x-1}\in\Re-\{-3\}\right\}=\Re-\{-1,0\}$

$\dfrac{3-x}{x-1}\neq -3\Leftrightarrow 3-x\neq -3\cdot(x-1)\Leftrightarrow 3-x\neq -3x+3\Leftrightarrow 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$

u) m^{-1}

- Primero estudiamos si $m(x)=x-4$ es inyectiva, es decir, [si $m(a)=m(b)\Rightarrow a=b$]
  $m(a)=m(b)\Rightarrow a-4=b-4\Rightarrow a=b$
  Por tanto, $m(x)$ es inyectiva y existe $m^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $m^{-1}(x)$

  1) $m(x) = x-4 \Rightarrow y = x-4$

  2) $x = y-4$

  3) $y = x+4$

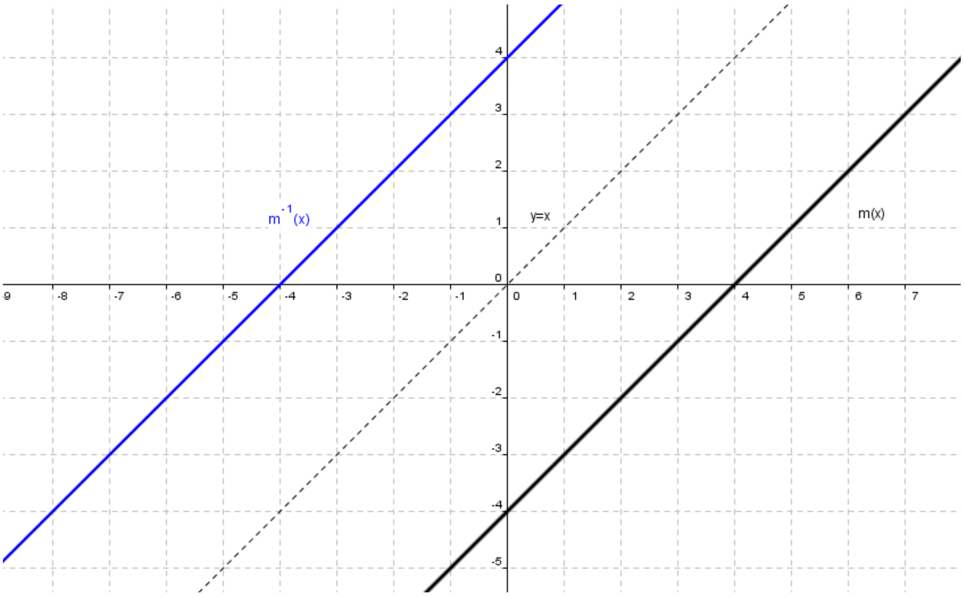
  4) $m^{-1}(x) = x+4$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $(m \circ m^{-1})(x) = m[m^{-1}(x)] = (x+4)-4 = x$

  $(m^{-1} \circ m)(x) = m^{-1}[m(x)] = (x-4)+4 = x$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(m) = \Re \qquad \mathrm{Re}\,c(m) = \Re$

$Dom(m^{-1}) = \Re \qquad \mathrm{Re}\,c(m^{-1}) = \Re$

v) j^{-1}

- Primero estudiamos si $j(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $j(a) = j(b) \Rightarrow a = b$]

  $j(a) = j(b) \Rightarrow \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{b-1}{b+1} \Rightarrow (a-1)\cdot(b+1) = (a+1)\cdot(b-1) \Rightarrow a\cdot b + a - b - 1 = a\cdot b - a + b - 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$

  Por tanto, $j(x)$ es inyectiva y existe $j^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $j^{-1}(x)$

1) $j(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow y=\dfrac{x-1}{x+1}$

2) $x=\dfrac{y-1}{y+1}$

3) $x\cdot(y+1)=y-1 \Rightarrow xy+x=y-1 \Rightarrow x+1=y-xy \Rightarrow x+1=y\cdot(1-x) \Rightarrow y=\dfrac{x+1}{1-x}$

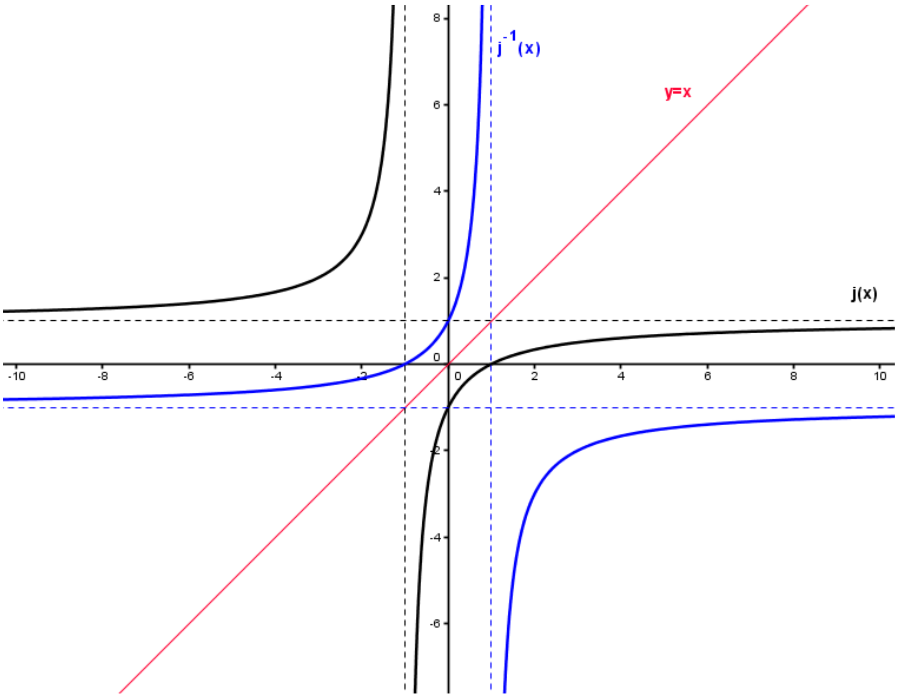
4) $j^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{1-x}$

- COMPROBACIÓN

$$(j\circ j^{-1})(x)=j[j^{-1}(x)]=j\left[\frac{x+1}{1-x}\right]=\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}=\frac{\frac{x+1-1+x}{1-x}}{\frac{x+1+1-x}{1-x}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$(j^{-1}\circ j)(x)=j^{-1}[j(x)]=j^{-1}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{1-\frac{x-1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{\frac{x+1-x+1}{x+1}}=\frac{2x}{2}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(j)=\Re-\{-1\} \qquad \mathrm{Re}\,c(j)=\Re-\{1\}$$
$$Dom(j^{-1})=\Re-\{1\} \qquad \mathrm{Re}\,c(j^{-1})=\Re-\{-1\}$$

w) r^{-1}

- Primero comprobaremos si $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ es inyectiva, es decir, [si $r(a)=r(b)\Rightarrow a=b$]

$$r(a)=r(b)\Rightarrow \frac{2a-1}{a+3}=\frac{2b-1}{b+3}\Rightarrow (2a-1)\cdot(b+3)=(a+3)\cdot(2b-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ab+6a-b-3=2ab-a+6b-3\Rightarrow 7a=7b\Rightarrow a=b$$

Por tanto, $r(x)$ es inyectiva y existe $r^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

1) $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}\Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{x+3}$

2) $x=\dfrac{2y-1}{y+3}$

3) $x\cdot(y+3)=2y-1\Rightarrow xy+3x=2y-1\Rightarrow 3x+1=2y-xy\Rightarrow 3x+1=y\cdot(2-x)\Rightarrow y=\dfrac{3x+1}{2-x}$

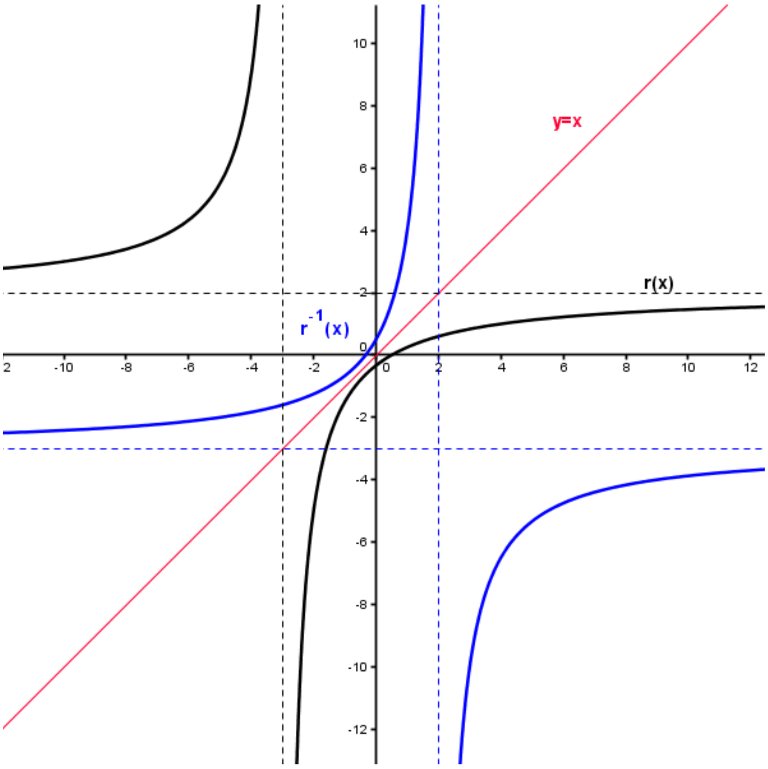
4) $r^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

$$(r\circ r^{-1})(x)=r[r^{-1}(x)]=r\left[\frac{3x+1}{2-x}\right]=\frac{2\cdot\dfrac{3x+1}{2-x}-1}{\dfrac{3x+1}{2-x}+3}=\frac{\dfrac{6x+2}{2-x}-1}{\dfrac{3x+1+6-3x}{2-x}}=\frac{6x+2-2+x}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

$$(r^{-1}\circ r)(x)=r^{-1}[r(x)]=r^{-1}\left[\frac{2x-1}{x+3}\right]=\frac{3\cdot\dfrac{2x-1}{x+3}+1}{2-\dfrac{2x-1}{x+3}}=\frac{\dfrac{6x-3}{x+3}+1}{\dfrac{2x+6-2x+1}{x+1}}=\frac{6x-3+x+3}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(r)=\Re-\{-3\} \qquad Re\,c(r)=\Re-\{2\}$$
$$Dom(r^{-1})=\Re-\{2\} \qquad Re\,c(r^{-1})=\Re-\{-3\}$$

x) s^{-1}

- Primero comprobaremos si $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$ es inyectiva, es decir, [si $s(a)=s(b)\Rightarrow a=b$]

  $s(a)=s(b)\Rightarrow \dfrac{3-a}{a-1}=\dfrac{3-b}{b-1}\Rightarrow (3-a)\cdot(b-1)=(a-1)\cdot(3-b)\Rightarrow 3b-3-ab+a=3a-ab-3+b\Rightarrow$

  $\Rightarrow -2a=-2b\Rightarrow a=b$

  Por tanto, $s(x)$ es inyectiva y existe $s^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

  1) $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}\Rightarrow y=\dfrac{3-x}{x-1}$

  2) $x=\dfrac{3-y}{y-1}$

  3) $x\cdot(y-1)=3-y\Rightarrow xy-x=3-y\Rightarrow xy+y=3+x\Rightarrow y\cdot(x+1)=3+x\Rightarrow y=\dfrac{3+x}{x+1}$

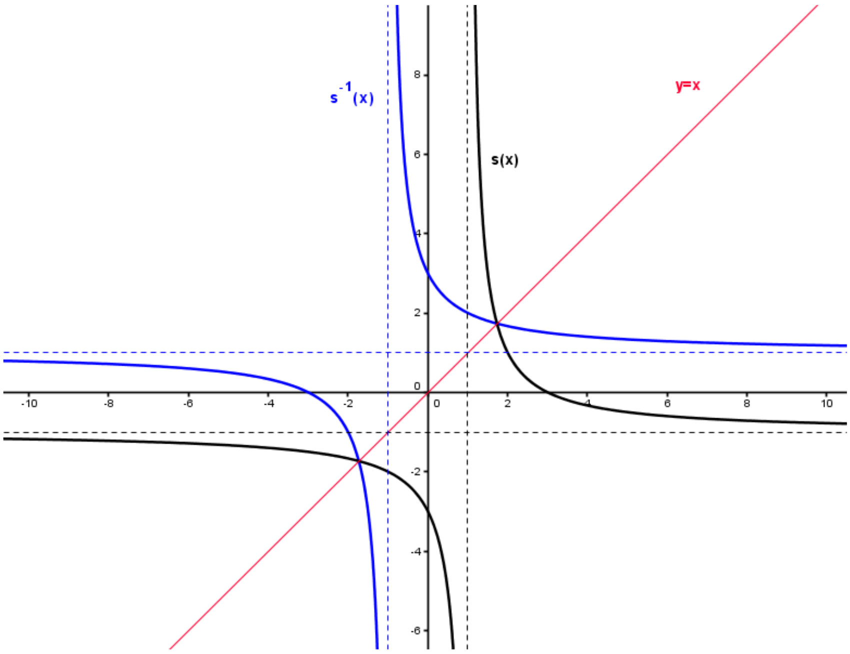
  4) $s^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{x+1}$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

$$(s\circ s^{-1})(x)=s[s^{-1}(x)]=s\left[\frac{3+x}{x+1}\right]=\frac{3-\dfrac{3+x}{x+1}}{\dfrac{3+x}{x+1}-1}=\frac{\dfrac{3x+3-3-x}{x+1}}{\dfrac{3+x-x-1}{x+1}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$(s^{-1}\circ s)(x)=s^{-1}[s(x)]=s^{-1}\left[\frac{3-x}{x-1}\right]=\frac{3+\dfrac{3-x}{x-1}}{\dfrac{3-x}{x-1}+1}=\frac{\dfrac{3x-3+3-x}{x-1}}{\dfrac{3-x+x-1}{x-1}}==\frac{2x}{2}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$



$$Dom(s)=\Re-\{1\} \qquad \mathrm{Re}\,c(s)=\Re-\{-1\}$$
$$Dom(s^{-1})=\Re-\{-1\} \qquad \mathrm{Re}\,c(s^{-1})=\Re-\{1\}$$

y) p^{-1}

- Primero comprobaremos que $p(x)=\sqrt{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $p(a)=p(b)\Rightarrow a=b$]

  $p(a)=p(b)\Rightarrow\sqrt{a+1}=\sqrt{b+1}\Rightarrow a+1=b+1\Rightarrow a=b$

  Por tanto, $p(x)$ es inyectiva y existe $p^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $p^{-1}(x)$

  1) $p(x)=\sqrt{x+1}\Rightarrow y=\sqrt{x+1}$

  2) $x=\sqrt{y+1}\Rightarrow x^2=y+1$

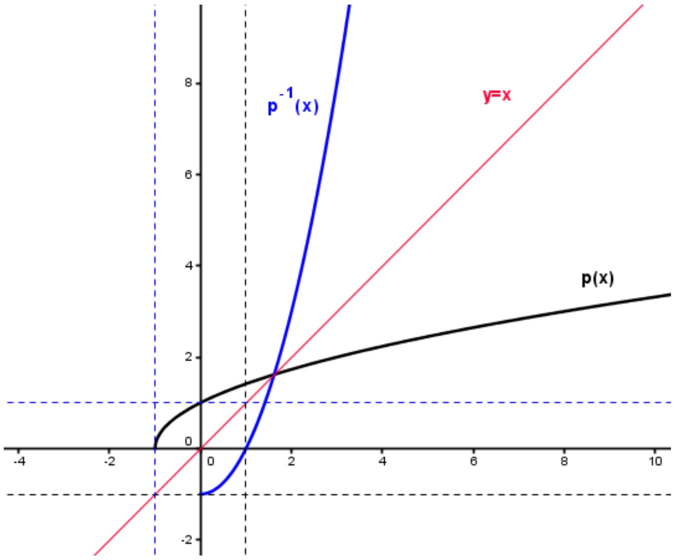
  3) $y=x^2+1$

  4) $p^{-1}(x)=x^2-1$ con $x\in[0,+\infty)$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

$$(p \circ p^{-1})(x) = p[p^{-1}(x)] = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = x$$
$$(p^{-1} \circ p)(x) = p^{-1}[p(x)] = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(p) = [-1, +\infty) \qquad \mathrm{Re}\,c(p) = [0, +\infty)$$
$$Dom(p^{-1}) = [0, +\infty) \qquad \mathrm{Re}\,c(p^{-1}) = [-1, +\infty)$$

z) g^{-1}

- Primero comprobaremos si $g(x) = x^2 - 6$ es inyectiva, es decir, [si $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$]

$$g(a) = g(b) \Rightarrow a^2 - 6 = b^2 - 6 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$$

$g(x)$ NO es inyectiva $\Rightarrow$ no existe la función $g^{-1}(x)$

- Lo que haremos será restringir el dominio de $g(x)$ a un conjunto en el que sí sea una función inyectiva y, por tanto, sí exista la función $g^{-1}(x)$.

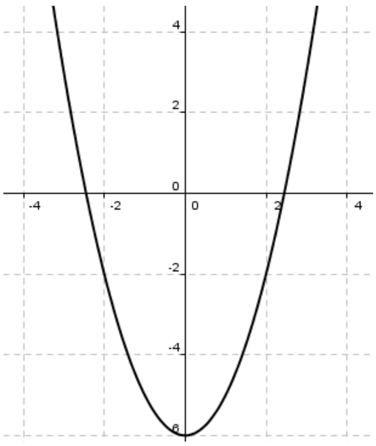
$g(x) = x^2 - 6$

1) $a = 1 > 0 \Rightarrow \cup$

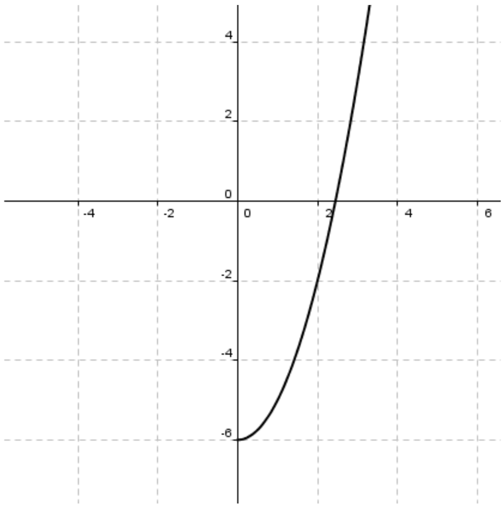
2) Vértice $(0, -6)$

3) Tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	-2	-5	-6	-5	-2	3



Restringimos $g(x) = x^2 - 6$ al conjunto $[0,+\infty)$



- Ahora calculamos $g^{-1}(x)$

  1) $g(x) = x^2 - 6 \Rightarrow y = x^2 - 6$

  2) $x = y^2 - 6 \Rightarrow y^2 = x + 6$

  3) $y = \sqrt{x+6}$

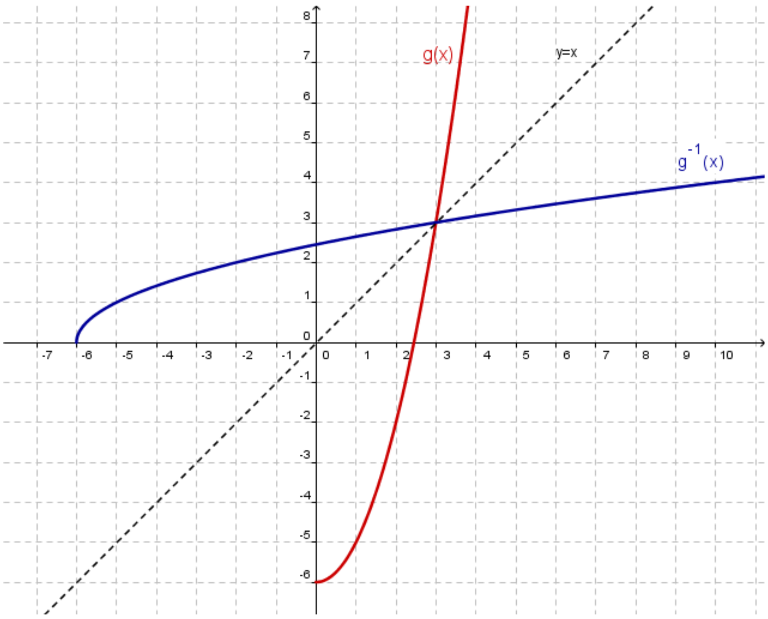
  4) $g^{-1}(x) = \sqrt{x+6}$ con $x \in [-6,+\infty)$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $(g \circ g^{-1})(x) = g[g^{-1}(x)] = (\sqrt{x+6})^2 - 6 = x$

  $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}[g(x)] = \sqrt{x^2 - 6 + 6} = x$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(g) = [0, +\infty) \qquad Rec(g) = [-6, +\infty)$$

$$Dom(g^{-1}) = [-6, +\infty) \qquad Rec(g^{-1}) = [0, +\infty)$$