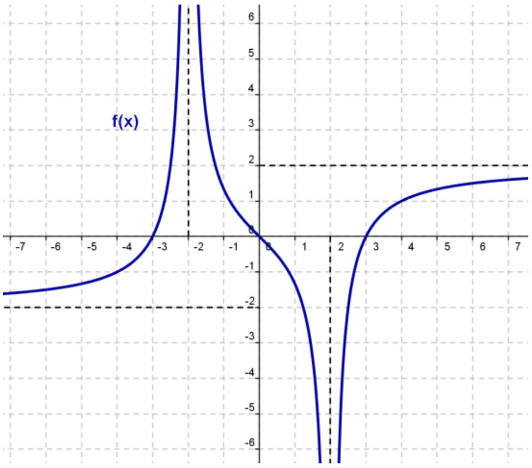
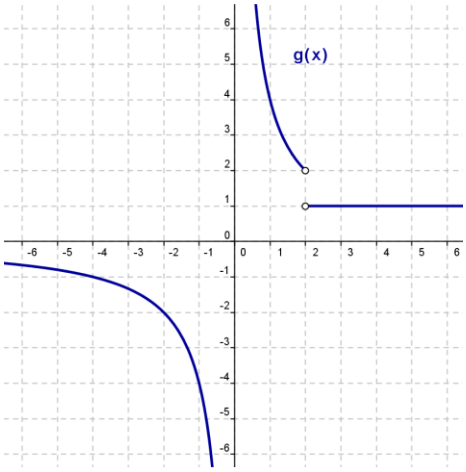
LÍMITES

	
♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2^{+}$ ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2^{-}$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)=0$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$	♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0^{-}$ ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=4\\ \lim\limits_{x\to1^+} g(x)=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} g(x)=4$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=2\\ \lim\limits_{x\to2^+} g(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to2} g(x)$ ♦ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} g(x)=\infty$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ → cuando x toma valores próximos al número a (tanto menores como mayores), los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan al número l.
  - ♦ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ = límite lateral por la izquierda → se toman valores próximos pero menores que a
  - ♦ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ = límite lateral por la derecha → se toman valores próximos pero mayores que a

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \iff \exists \lim_{x\to a^-} f(x)\ ,\ \exists \lim_{x\to a^+} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)}$$

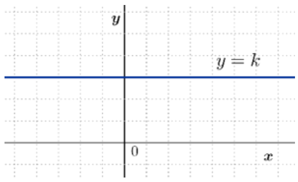
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ → cuando x toma valores próximos al número a (por ambos lados) los correspondientes valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes y positivos
  - ♦ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ = límite lateral por la izquierda → se toman valores próximos pero menores que a
  - ♦ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ = límite lateral por la derecha → se toman valores próximos pero mayores que a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ → cuando x toma valores próximos al número a (por ambos lados) los correspondientes valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente grandes y negativos.
  - $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ = límite lateral por la izquierda → se toman valores próximos pero menores que a
  - $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ = límite lateral por la derecha → se toman valores próximos pero mayores que a

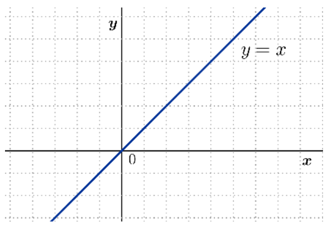
- Las expresiones $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ denotan los valores a los que tiende la función $f(x)$ cuando x tiende a valores muy pequeños o muy grandes, respectivamente. Dichos límites pueden existir o no como números reales.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1) El límite de una función en un punto, si existe, es único.

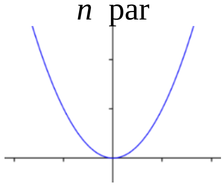
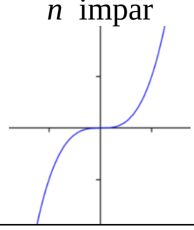


2) $\lim\limits_{x \to a} k = k$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} k = k$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} k = k$ con k constante



3) $\lim\limits_{x \to a} x = a$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

$y = x^n$	
n par	n impar
	

5) Si existen $\lim f(x)$ y $\lim g(x)$, se verifica:

- $\lim \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
- $\lim \left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot \lim f(x)$
- $\lim \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ si $\lim g(x) \neq 0$
- $\lim \left[f(x) \right]^{g(x)} = \left[\lim f(x) \right]^{\lim g(x)}$ si $\lim f(x) > 0$

6) $\lim\left[f(x)\right]^p = \left[\lim f(x)\right]^p \quad p \in Z$

$\lim\left[\ln f(x)\right] = \ln\left[\lim f(x)\right] \quad$ si $\quad \lim f(x) > 0$

$\lim\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(-x)$

INDETERMINACIONES

$\infty - \infty$	$0\cdot(\pm\infty)$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\dfrac{0}{0}$	$(+\infty)^0$	0^0	$1^{\pm\infty}$

La aparición de una indeterminación no quiere decir que el límite no exista, sino que no es posible calcularlo utilizando una regla general y será necesario analizar el caso concreto para calcular su valor.

REGLA DE CÁLCULO CON EL ∞

$a+(+\infty)=+\infty$ $a+(-\infty)=-\infty$ $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ $\boxed{\infty-\infty=\mathrm{I}}$	Si $a>0$ $\begin{cases} a\cdot(+\infty)=+\infty \\ a\cdot(-\infty)=-\infty \end{cases}$ Si $a<0$ $\begin{cases} a\cdot(+\infty)=-\infty \\ a\cdot(-\infty)=+\infty \end{cases}$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ $\boxed{0\cdot(\pm\infty)=\mathrm{I}}$
Si $a>0$ $\begin{cases} \dfrac{+\infty}{a}=+\infty \\ \dfrac{-\infty}{a}=-\infty \end{cases}$ Si $a<0$ $\begin{cases} \dfrac{+\infty}{a}=-\infty \\ \dfrac{-\infty}{a}=+\infty \end{cases}$	$\dfrac{a}{0}=¿?\,\infty \quad \dfrac{\infty}{0}=¿?\,\infty \quad \dfrac{0}{\infty}=0$ $\boxed{\dfrac{0}{0}=\mathrm{I} \quad \dfrac{\infty}{\infty}=\mathrm{I}}$	
$a^{+\infty}=\begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 0 & \text{si } 0<a<1 \end{cases}$	$a^{-\infty}=\begin{cases} 0 & \text{si } a>1 \\ +\infty & \text{si } 0<a<1 \end{cases}$	$\boxed{1^{\pm\infty}=\mathrm{I}}$
$(+\infty)^k=\begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}$ $\boxed{(+\infty)^0=\mathrm{I}}$	$0^k=\begin{cases} 0 & \text{si } k>0 \\ +\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$ $\boxed{0^0=\mathrm{I}}$	