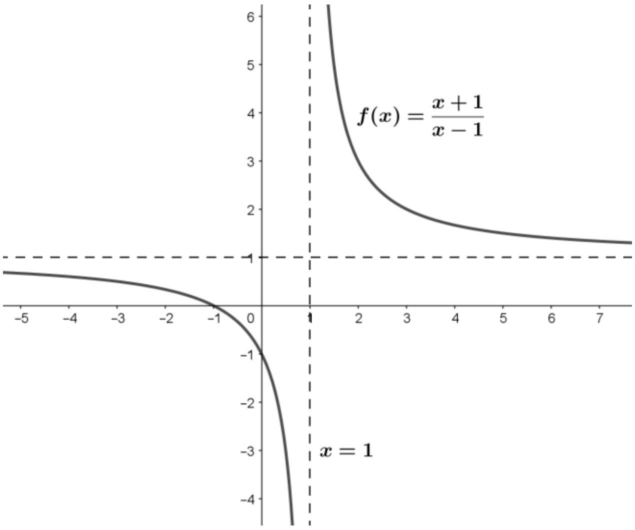
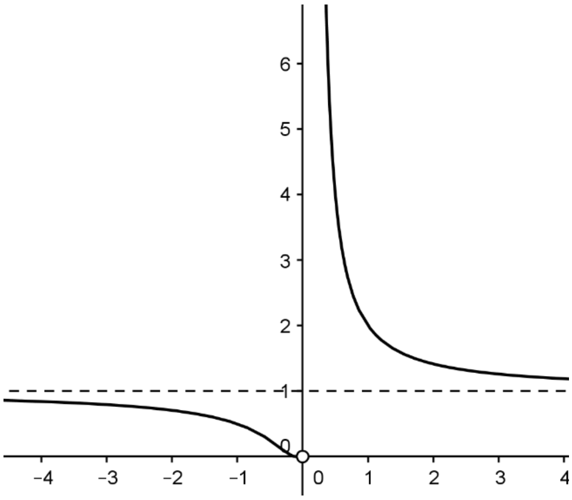
ASÍNTOTAS VERTICALES (A.V.)

- $x = a$ es una <u>asíntota vertical</u> de $f(x)$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
  - ✓ Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ $x = a$ es <u>asíntota vertical por la izquierda</u> de $f(x)$
  - ✓ Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ $x = a$ es <u>asíntota vertical por la derecha</u> de $f(x)$





$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)$$

$$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es A.V. por la derecha de } f(x)$$

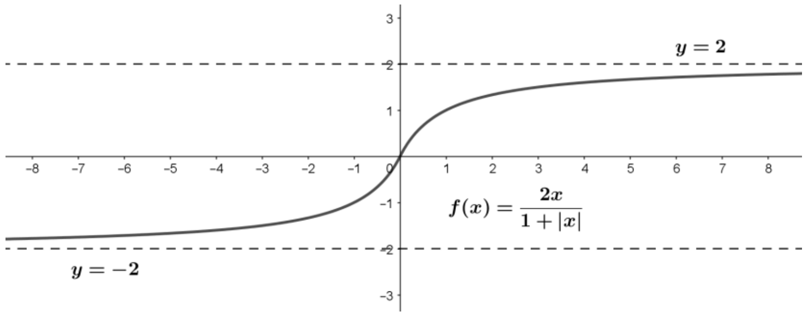
<u>Observaciones</u>

- Las funciones polinómicas no tienen asíntotas verticales.
- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional $\Rightarrow$ Las posibles asíntotas verticales de $f(x)$ son las rectas $x = a$ con $a \in \{\text{raíces de } Q(x)\}$.

  Habrá que comprobar si son o no asíntotas verticales: si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \Rightarrow x = a \text{ sí es A.V.} \\ \text{n}^\text{o} & \Rightarrow x = a \text{ no es A.V.} \end{cases}$
- Una función puede tener varias asíntotas verticales, incluso infinitas (por ejemplo, $f(x) = \operatorname{tg} x$).
- La gráfica de una función <u>nunca</u> corta a una asíntota vertical.
- Si $x = a$ es una A.V. de $f(x)$, la tendencia por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en $x = a$ puede ser idéntica u opuesta.

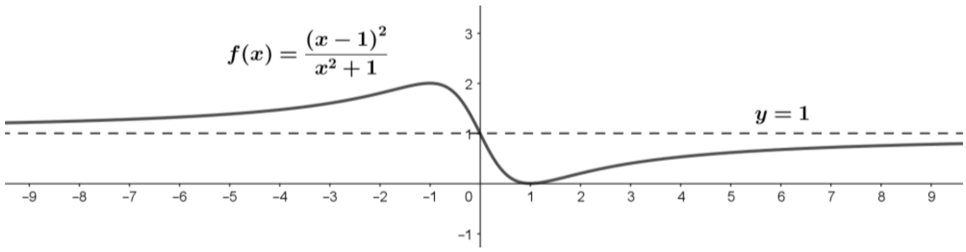
ASÍNTOTAS HORIZONTALES (A.H.)

- $y = k$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = k$
  - ✓ Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k \Rightarrow$ $y = k$ es <u>asíntota horizontal por la derecha</u> de $f(x)$
  - ✓ Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k \Rightarrow$ $y = k$ es <u>asíntota horizontal por la izquierda</u> de $f(x)$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2^- \;\Rightarrow\; y=2 \text{ es asíntota horizontal de } f(x) \text{ por la derecha}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2^+ \;\Rightarrow\; y=-2 \text{ es asíntota horizontal de } f(x) \text{ por la izquierda}$$



$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1^+\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1^-\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \;\Rightarrow\; y=1 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$

<u>Observaciones</u>

- Las funciones polinómicas no tienen asíntotas horizontales.
- Las funciones racionales, si tienen asíntota horizontal es la misma por ambos lados.
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional $\Rightarrow$ [$f(x)$ tiene A.H. $\Leftrightarrow$ grado $P(x)\le$ grado $Q(x)$]
  - ✓ Si grado $P(x)<$ grado $Q(x)$ $\Rightarrow$ $y=0$ es A.H. de $f(x)$
  - ✓ Si grado $P(x)=$ grado $Q(x)$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{a}{b}$ es A.H. de $f(x)$ siendo *a* y *b* los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente.
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales (una por la derecha y otra por la izquierda). Hay funciones que tienen solo una asíntota horizontal (por la derecha o por la izquierda) o que no tienen asíntotas horizontales.
- La gráfica de una función puede cortar a una asíntota horizontal.
- **Posición de *f* (*x*) respecto a una A.H.**

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\text{asíntota})=\begin{cases}0^+ \;\Rightarrow\; f(x) \text{ está por encima de la A.H.}\\ 0^- \;\Rightarrow\; f(x) \text{ está por debajo de la A.H.}\end{cases}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS (A.O.)

$y = mx + n$ ($m \neq 0$) es una asíntota oblicua de $f(x)$ si $\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0$

A.O. por la derecha

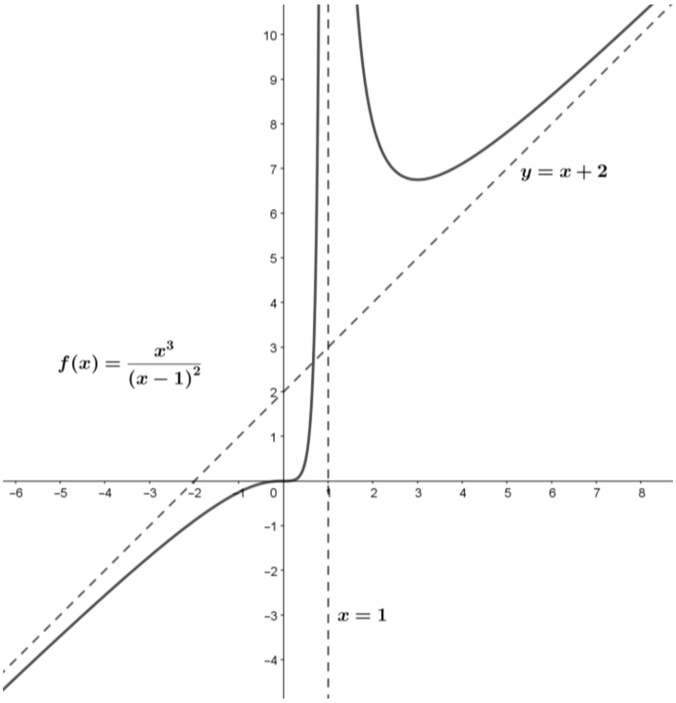
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - m \cdot x \right]$$

A.O. por la izquierda

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - m \cdot x \right]$$



$y = x + 2$ es asíntota oblicua de $f(x)$

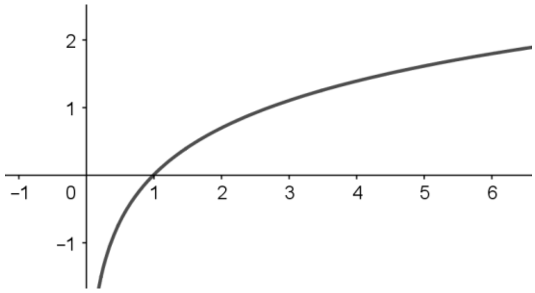
Observaciones

- Las funciones polinómicas no tienen asíntotas oblicuas.
- Las funciones racionales, si tienen asíntota oblicua es la misma por ambos lados.
- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional $\Rightarrow$ [$f(x)$ tiene A.O. $\Leftrightarrow$ grado $P(x) = 1 +$ grado $Q(x)$]
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas (una por la derecha y otra por la izquierda). Hay funciones que tienen solo una asíntota oblicua (por la derecha o por la izquierda) o que no tienen asíntotas oblicuas.
- La gráfica de una función puede cortar a una asíntota oblicua.
- Si $f(x)$ tiene A.H. no tiene A.O. y viceversa; lo que si puede ocurrir es que $f(x)$ tenga A.H. por la derecha y A.O. por la izquierda o al revés.
- **Posición de $f(x)$ respecto a una A.O.**

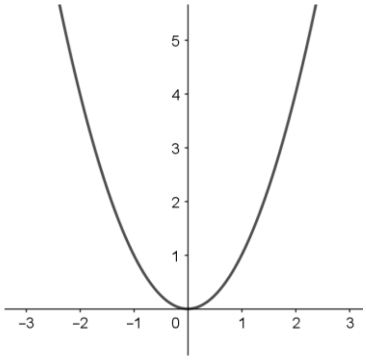
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \text{asíntota} \right) = \begin{cases} 0^{+} \Rightarrow f(x) \text{ está por encima de la A.O.} \\ 0^{-} \Rightarrow f(x) \text{ está por debajo de la A.O.} \end{cases}$$

RAMOS PARABÓLICAS

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x)$ tiene una rama parabólica en la dirección del eje OX



Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow$ $f(x)$ tiene una rama parabólica en la dirección del eje OY



EJEMPLOS

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \Re - \{x \,/\, x^2 - x = 0\} \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \Re - \{0,1\}}$

ASÍNTOTAS VERTICALES (A.V.)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{-1}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \underline{x = 0 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{0}{0}(\text{I}) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{1} = 2 \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ NO es A.V. de } f(x)}$$

Observación

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \\ \nexists\, f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ presenta en } x = 1 \text{ una discontinuidad evitable.}$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES (A.H.)

$f(x)$ es una función racional $\Rightarrow$ si tiene asíntota horizontal es la misma por ambos lados.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}(\mathrm{I})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1-0}=1 \quad\Rightarrow\quad \underline{y=1 \text{ es A.H. de } f(x)}$$

Posición de la función respecto a la asíntota

Izquierda

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\text{asíntota})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-x}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-x}=\frac{-\infty}{+\infty}(\mathrm{I})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0^-\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x) \text{ está por debajo de la A.H.}}$

Derecha

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\text{asíntota})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-x}=\frac{+\infty}{+\infty}(\mathrm{I})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0^+\quad\Rightarrow$$

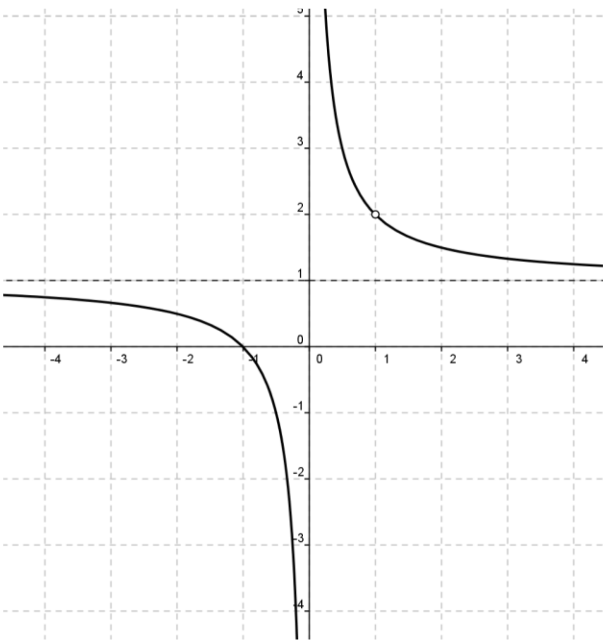
$\Rightarrow$ $\underline{f(x) \text{ está por encima de la A.H.}}$

Otra forma

Izquierda $\quad x=-100 \Rightarrow \begin{cases}\text{Función} \rightarrow y=\dfrac{(-100)^2-1}{(-100)^2-(-100)}=0,99\\ \text{Asíntota} \rightarrow y=1\end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ está por debajo de la A.H.}}$

Derecha $\quad x=100 \Rightarrow \begin{cases}\text{Función} \rightarrow y=\dfrac{(100)^2-1}{(100)^2-100}=1,01\\ \text{Asíntota} \rightarrow y=1\end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ está por encima de la A.H.}}$

Asíntotas oblicuas: como hay A.H. no hay A.O.



2) $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x+2} \Rightarrow \text{Dom}(f)=\Re-\{x/x+2=0\} \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f)=\Re-\{-2\}}$

ASÍNTOTAS VERTICALES (A.V.)

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x+2}=\frac{10}{0}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{2x^2-x}{x+2}=\frac{10}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{2x^2-x}{x+2}=\frac{10}{0^+}=+\infty\end{cases} \Rightarrow \underline{x=-2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES (A.H.)

$f(x)$ es una función racional $\Rightarrow$ si tiene asíntota horizontal es la misma por ambos lados.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}(\text{I})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow \underline{f(x)\text{ no tiene A.H.}}$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS (A.O.)

$f(x)$ es una función racional $\Rightarrow$ si tiene asíntota oblicua es la misma por ambos lados.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}(\text{I})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2 \Rightarrow \underline{m=2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}(\text{I})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-5}{1+0}=-5 \Rightarrow \underline{n=-5}$$

Por tanto, $\underline{y=2x-5 \text{ es A.O. de } f(x)}$

Posición de la función respecto a la asíntota

Izquierda

$$\lim_{x\to -\infty}(f(x)\ -\ \text{asíntota})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x+2}-(2x-5)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{10}{x+2}=\frac{10}{-\infty}=0^- \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x)\text{ está por debajo de la A.H.}}$

Derecha

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x)\ -\ \text{asíntota})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x+2}-(2x-5)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{x+2}=\frac{10}{+\infty}=0^+ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x)\text{ está por encima de la A.H.}}$

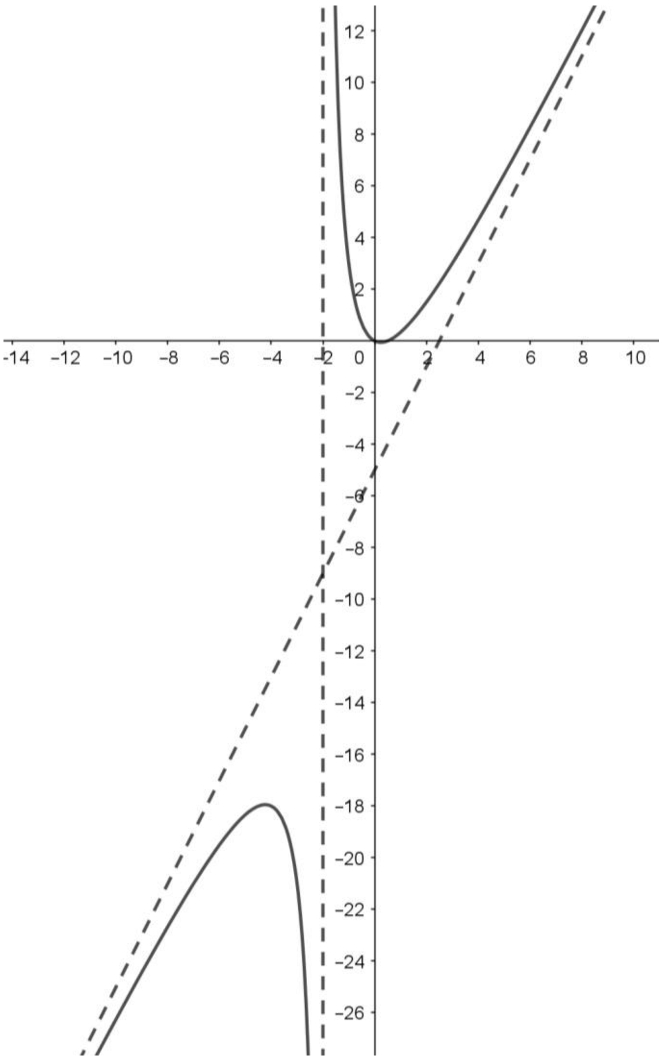
Otra forma

Izquierda

$$x=-100 \Rightarrow \begin{cases} \text{Función} \rightarrow \quad y=\dfrac{2\cdot(-100)^2-(-100)}{(-100)+2}=-205{,}1... \\ \text{Asíntota} \rightarrow \quad y=2\cdot(-100)-5=-205 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{f(x) \text{ está por debajo de la A.O.}}$$

Derecha

$$x=100 \Rightarrow \begin{cases} \text{Función} \rightarrow \quad y=\dfrac{2\cdot(100)^2-100}{100+2}=195{,}09... \\ \text{Asíntota} \rightarrow \quad y=2\cdot 100-5=195 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{f(x) \text{ está por debajo de la A.O.}}$$



2) $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom}(y=2^x)=\Re \quad \Rightarrow \quad (-\infty,0)\in \text{Dom}(f) \\ \text{Dom}\left(y=\dfrac{x^2}{x+1}\right)=\Re-\{x \,/\, x+1=0\}=\Re-\{-1\} \quad \Rightarrow \quad [0,+\infty)\in \text{Dom}(f) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f)=\Re}$$

ASÍNTOTAS VERTICALES (A.V.)

$f(x)$ no tiene A.V.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES (A.H.)

Izquierda

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2^x=2^{-\infty}=0^+ \quad \Rightarrow \quad \underline{y=0 \text{ es A.H. de } f(x)} \text{ y } \underline{f(x) \text{ está por encima de la A.H.}}$$

Derecha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{I})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{0}=+\infty \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x) \text{ no tiene A.H. por la derecha}}$

ASÍNTOTAS OBLICUAS (A.O.)

Izquierda: Como $f(x)$ tiene A.H. por la izquierda no tiene A.O.

Derecha

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{+\infty}{+\infty}(\text{I})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{0+1}=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{m=1}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=\frac{-\infty}{+\infty}(\text{I})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-1}{1}=-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{n=-1}$$

Por tanto, $\underline{y=x-1 \text{ es A.O. de } f(x) \text{ por la derecha}}$

Posición de la función respecto a la asíntota

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\ -\ \text{asíntota}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \ \Rightarrow\ \underline{f(x)\text{ está por encima de la A.O.}}$$

Otra forma

$$x=100\ \Rightarrow\ \begin{cases}\text{Función}\ \ \rightarrow\ \ y=\dfrac{100^2}{100+1}=99,009... \\ \text{Asíntota}\ \ \rightarrow\ \ y=100-1=99\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{f(x)\text{ está por encima de la A.O.}}$$