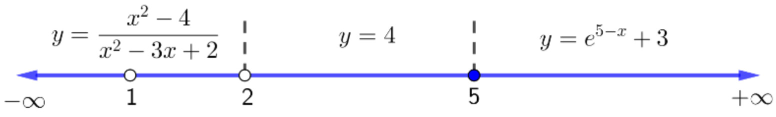
EJERCICIO 3

Apartado a)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{si} \quad x<2\\ 4 & \text{si} \quad 2<x<5\\ e^{5-x}+3 & \text{si} \quad x\geq 5\end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} * \ \mathrm{Dom}\left(y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)=\{x\in\Re \,/\, x^2-3x+2\neq 0\}=\Re-\{1,2\} \quad \Rightarrow \quad \underline{(-\infty,1)\cup(1,2)\in \mathrm{Dom}(f)}\\ * \ \mathrm{Dom}(y=4)=\Re \quad \Rightarrow \quad \underline{(2,5)\in \mathrm{Dom}(f)}\\ * \ \mathrm{Dom}(y=e^{5-x}+3)=\Re \quad \Rightarrow \quad \underline{[5,+\infty)\in \mathrm{Dom}(f)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Dom}(f)=\Re-\{1,2\}}$$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio por ser racional, polinómica y exponencial respectivamente $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en su dominio salvo quizás en $x=5$.

  Tenemos que estudiar que ocurre en $x=5$ y clasificar las discontinuidades de $x=1$ y $x=2$.

$\boxed{x=1}$

✓ $$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{0}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{0^-}=+\infty\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

$\boxed{f(x) \text{ no es continua en } x=1 \text{ y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto infinito}}$

$\boxed{x=2}$

✓ $$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}(\mathrm{I})=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x-1}=\frac{4}{1}=4\\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}4=4\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

✓ $\nexists \ f(2) \quad (2\notin \mathrm{Dom}(f))$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)=4\\ \nexists \ f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ no es continua en } x=2 \text{ y en dicho punto presenta una discontinuidad evitable}}$$

$\boxed{x=5}$

✓ $$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}4=4\\ \displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}(e^{5-x}+3)=e^0+3=1+3=4\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{x\to 5} f(x)=4$$

✓ $f(5)=e^0+3=4 \quad \Rightarrow \quad \exists \ f(5)=4$

✓ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$

$$\boxed{\exists \lim\limits_{x \to 5} f(x)\,,\ \exists\, f(5) \text{ y } \lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 5}$$

SOLUCIÓN

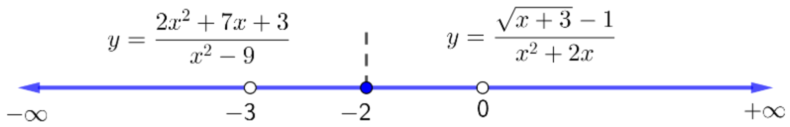
$f(x)$ es continua en $\Re - \{1, 2\}$
En $x = 1$ presenta una discontinuidad de salto infinito
En $x = 2$ presenta una discontinuidad evitable

Apartado b)

- $$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty}(\mathrm{I}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0+0} = 1$$
- $$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{5-x} + 3 = e^{-\infty} + 3 = 0 + 3 = 3$$

EJERCICIO 4

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} & \text{si } x \le -2 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 + 2x} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} * \ \mathrm{Dom}\left(y = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} \right) = \{x \in \Re \,/\, x^2 - 9 \ne 0\} = \Re - \{-3, 3\} \Rightarrow \underline{(-\infty, -3) \cup (-3, -2] \in \mathrm{Dom}(f)} \\ * \ \mathrm{Dom}\left(y = \dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 + 2x} \right) = \{x \in \Re \,/\, x + 3 \ge 0 \ \wedge \ x^2 + 2x \ne 0\} = [-3, +\infty) - \{-2, 0\} \Rightarrow \underline{(-2, 0) \cup (0, +\infty) \in \mathrm{Dom}(f)} \\ \quad x + 3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3 \\ \quad x^2 + 2x \ne 0 \Rightarrow x(x+2) \ne 0 \Rightarrow x \ne 0 \text{ y } x \ne -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \Re - \{-3, 0\}}$$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en su dominio salvo quizás en $x = -2$.
  Tenemos que estudiar que ocurre en $x = -2$ y clasificar las discontinuidades de $x = -3$ y $x = 0$.

$\boxed{x = -3}$

✓ $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{0}{0}(\mathrm{I}) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2(x+3)(x+1/2)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+1}{x-3} = \dfrac{-5}{-6} = \dfrac{5}{6}$

✓ $\nexists\ f(-3)$ $(-3 \notin \mathrm{Dom}(f))$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to -3} f(x) = 5/6 \\ \nexists\ f(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ no es continua en } x = -3 \text{ y en dicho punto presenta una discontinuidad evitable}}$$

$\boxed{x=-2}$

$$\begin{cases} * \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-9} = \dfrac{8-14+3}{4-9} = \dfrac{3}{5} \\ \\ * \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x} = \dfrac{0}{0}(\mathrm{I}) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(\sqrt{x+3}-1)\cdot(\sqrt{x+3}+1)}{(x^2+2x)\cdot(\sqrt{x+3}+1)} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{(x+2)}{x\cdot(x+2)\cdot(\sqrt{x+3}+1)} = \\ \quad = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x\cdot(\sqrt{x+3}+1)} = \dfrac{1}{(-2)\cdot 2} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nexists \lim_{x\to -2} f(x) \quad \Rightarrow$$

$f(x)$ no es continua en $f(x)$ y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto finito

$\boxed{x=0}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x} = \frac{\sqrt{3}-1}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

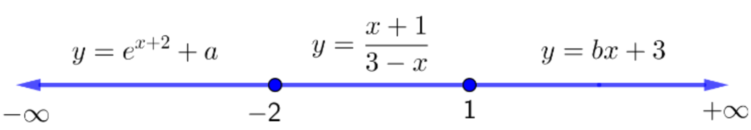
$f(x)$ no es continua en $x=0$ y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto infinito o asintótica

SOLUCIÓN

$f(x)$ es continua en $\Re-\{-3,-2,0\}$
En $x=-3$ presenta una discontinuidad evitable
En $x=-2$ presenta una discontinuidad de salto finito
En $x=0$ presenta una discontinuidad de salto infinito

EJERCICIO 5

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+2}+a & \text{si} \quad x \le -2 \\ \dfrac{1+x}{3-x} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ bx+3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dom}(y = e^{x+2}+a) = \Re \ \forall a \ \Rightarrow \ \underline{(-\infty,-2] \in \mathrm{Dom}(f)} \\ \mathrm{Dom}\left(y = \dfrac{1+x}{3-x}\right) = \{x\in\Re / 3-x \ne 0\} = \Re - \{3\} \ \Rightarrow \ \underline{(-2,1) \in \mathrm{Dom}(f)} \\ \mathrm{Dom}(y = bx+3) = \Re \ \forall b \ \Rightarrow \ \underline{[1,+\infty) \in \mathrm{Dom}(f)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Dom}(f) = \Re \quad \forall a,b}$$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio por ser exponencial, racional y polinómica respectivamente $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty) \quad \forall a,b$

  Tenemos que hallar a y b para que $f(x)$ también sea continua en $x=-2$ y $x=1$

$\boxed{x=-2}$

$$f(x) \text{ es continua en } x=-2 \iff \begin{cases} 1)\ \exists \lim\limits_{x\to -2} f(x) \\ 2)\ \exists f(-2) \\ 3)\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2) \end{cases} \iff \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \iff$$

$$\iff 1+a=-\frac{1}{5} \iff \boxed{a=-\frac{6}{5}}$$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(e^{x+2}+a)=e^0+a=1+a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1+x}{3-x}=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$
- $f(-2)=e^2+a=1+a$

$\boxed{x=1}$

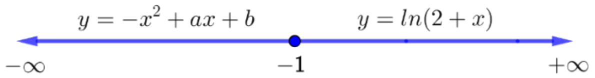
$$f(x) \text{ es continua en } x=1 \iff \begin{cases} 1)\ \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \\ 2)\ \exists f(1) \\ 3)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \end{cases} \iff \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \iff b+3=1 \iff \boxed{b=-2}$$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{3-x}=\dfrac{2}{2}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(bx+3)=b+3 \end{cases}$
- $f(1)=b\cdot 1+3=b+3$

SOLUCIÓN $\boxed{f(x) \text{ es continua en } \Re \text{ si } a=-6/5 \text{ y } b=-2}$

EJERCICIO 6

$$f(x)=\begin{cases} \ln(2+x) & \text{si } x>-1 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x\le -1 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} *\ \mathrm{Dom}(y=\ln(2+x))=\{x\in\Re/2+x>0\}=(-2,+\infty) \Rightarrow \underline{(-1,+\infty)\in \mathrm{Dom}(f)} \\ \quad 2+x>0 \Rightarrow x>-2 \\ *\ \mathrm{Dom}(y=-x^2+ax+b)=\Re\ \forall a,b \Rightarrow \underline{(-\infty,-1]\in \mathrm{Dom}(f)} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Dom}(f)=\Re\ \forall a,b}$$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio por ser polinómica y logarítmica respectivamente $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ $\forall a,b$

  Tenemos que hallar *a* y *b* para que $f(x)$ también sea continua en $x=-1$

$\boxed{x=-1}$

$$f(x) \text{ es continua en } x=-1 \iff \begin{cases} 1)\ \exists \lim\limits_{x\to -1} f(x) \\ 2)\ \exists f(-1) \\ 3)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1) \end{cases} \iff \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \iff$$

$\Leftrightarrow \quad -1-a+b=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a-b=-1}$

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \ln(x+2) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x^2+ax+b) = -1-a+b \end{cases}$
- $f(-1) = -1-a+b$

- Además, se debe verificar que $f(-2)=-6 \quad \Rightarrow \quad -(-2)^2+a\cdot(-2)+b=-6 \quad \Rightarrow \quad -4-2a+b=-6 \quad \Rightarrow$

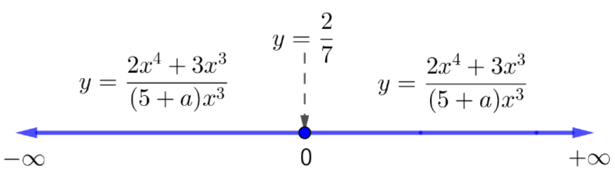
  $\Rightarrow \boxed{-2a+b=-2}$

Por tanto, $\left.\begin{array}{l} a-b=-1 \\ -2a+b=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{resolviendo el sistema}} a=3 \quad \text{y} \quad b=4$

SOLUCIÓN $\boxed{f(x) \text{ es continua en } \Re \text{ y } f(-2)=-6 \quad \text{si} \quad a=3 \text{ y } b=4}$

EJERCICIO 9.6.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^4+3x^3}{(5+a)x^3} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \dfrac{2}{7} & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \qquad (\text{con } a\neq -5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Dom}(f)=\Re}$$



- $y=\dfrac{2x^4+3x^3}{(5+a)x^3}$ $(a\neq -5)$ es continua en su dominio, $\Re-\{0\}$, por ser racional $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\Re-\{0\} \quad \forall\, a\neq -5$.
- Tenemos que hallar el valor de "a" para que $f(x)$ también sea continua en $x=0$

$$f(x) \text{ es continua en } x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1) \ \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \\ 2) \ \exists\, f(0) \\ 3) \ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5+a}=\frac{2}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 21=10+2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a=11 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a=\frac{11}{2}}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4+3x^3}{(5+a)x^3} = \dfrac{0}{0}(\text{I}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(2x+3)}{(5+a)x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3}{(5+a)} = \dfrac{3}{(5+a)}$
- $f(0)=\dfrac{2}{7}$

SOLUCIÓN

- Si $a = \frac{11}{2}$ $\left(\text{y} \quad a \neq -5\right)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\Re$.
- Si $a \neq \frac{11}{2}$ $\left(\text{y} \quad a \neq -5\right)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $\Re - \{0\}$ y en $x = 0$ presenta una discontinuidad evitable ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{5+a} \neq \frac{2}{7} = f(0)$