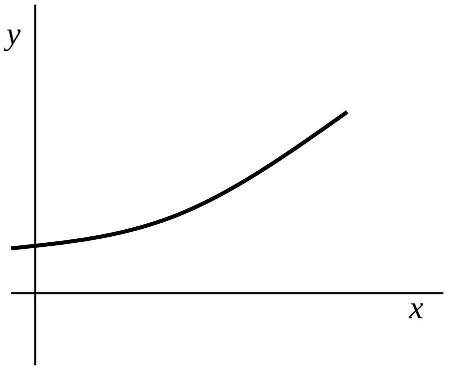
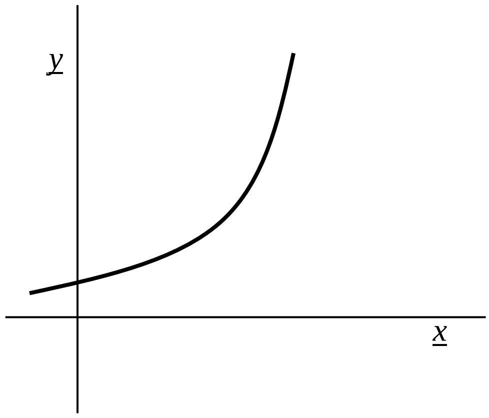
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Tanto la gráfica como la expresión analítica de una función proporcionan los valores de una variable en relación con los de otra. La variación, el cambio de una variable con respecto a la otra, puede producirse de forma más o menos rápida.



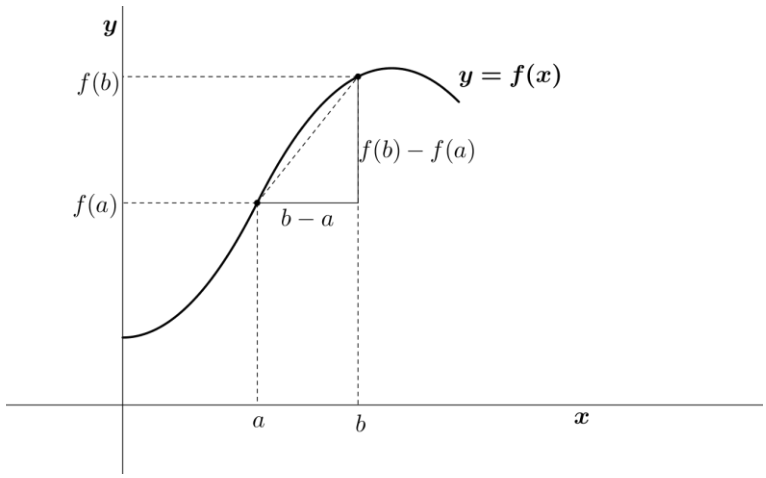


En estas dos gráficas "*y*" aumenta al aumentar "*x*", pero en la segunda lo hace más deprisa. ¿Cómo se mide esto? Para conseguir medir la rapidez de cambio de una variable con respecto a la otra tendremos que referirnos a lo que varía "*y*" con relación a lo que varía "*x*", es decir, a la variación relativa.

DEFINICIÓN

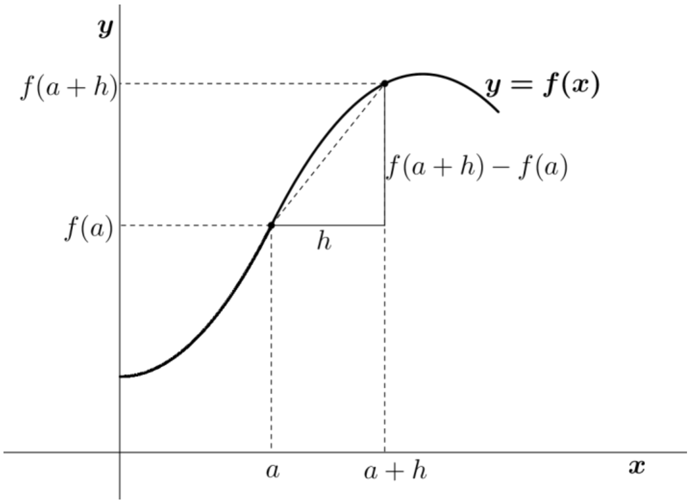
Se define la **tasa de variación media** de $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ y se denota por T.V.M $[a,b]$ como:

$$\text{T.V.M.}[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Es decir, la T.V.M.$[a,b]$ es el cociente entre el incremento que experimenta la función en el intervalo, $\Delta y = f(b)-f(a)$, y la amplitud del intervalo, $\Delta x = b-a$.

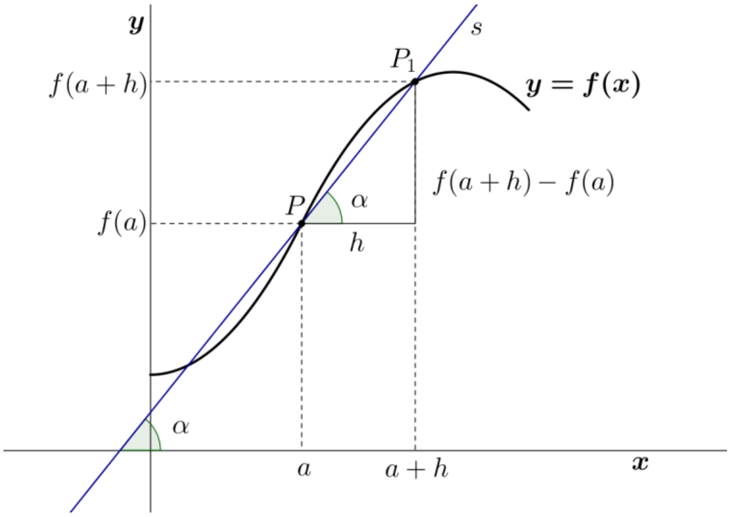
Con frecuencia al intervalo se le designa mediante la expresión $[a,a+h]$. En tal caso, la tasa de variación media se obtiene así: T.V.M.$[a,a+h] = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Sea $f(x)$ una función real de variable real y sean $P(a, f(a))$ y $P_1(a+h, f(a+h))$ dos puntos de su gráfica.

Trazamos la recta secante a la gráfica de $f(x)$ que pasa por P y P_1.



La pendiente de esta recta es: $m_{\overline{PP_1}} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{T.V.M.}\left[a, a+h\right]$

Es decir, la T.V.M. $\left[a, a+h\right]$ es la **pendiente de la recta secante a la gráfica de $f(x)$** en los puntos $P(a, f(a))$ **y** $P_1(a+h, f(a+h))$

EJEMPLO: Supongamos un móvil que se desplaza según la ecuación $f(t) = t^2 - 4t$ donde t = tiempo (en segundos) y $f(t)$ = espacio recorrido (en metros)

Calcular la velocidad media en los intervalos $[2,4]$ y $[4,6]$

$$v_m[2,4] = \text{T.V.M.}[2,4] = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{0-(-4)}{2} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_m[4,6] = \text{T.V.M.}[4,6] = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{12-0}{2} = 6 \text{ m/s}$$

2. VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: DERIVADA

La tasa de variación media da una primera idea de la rapidez conque la función crece o decrece en un intervalo, pero muchas veces la información que proporciona no es suficiente para tener totalmente caracterizada a la función. En la mayoría de las ocasiones es interesante y útil conocer la variación que experimenta la función en cada punto, es decir, "*la variación instantánea de la función*".

Si se quiere determinar la variación instantánea de una función en un punto (proceso que equivale a calcular la velocidad instantánea) los extremos del intervalo de variación $\left[a, a+h\right]$ deberán aproximarse infinitamente, es decir, h deberá tender a cero ($h \to 0$).

Por tanto, el crecimiento de una función en un punto se obtiene mediante el siguiente límite:

$$\text{T.V.I. }(a) = \lim_{h\to 0} \text{T.V.M.}\left[a, a+h\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El nombre que se le da en matemáticas a este limite es **derivada de *f*(*x*) en *a*** y se designa por ***f´*(*a*)**.

DEFINICIÓN

Se denomina **derivada de *f*(*x*) en el punto *a*** y se designa por ***f´*(*a*)** al siguiente límite, si existe y es finito:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- La derivada de una función en un punto, si existe, es un número real.
- Si existe $f'(a)$ se dice que $f(x)$ es derivable en $x = a$.
- La derivada de una función en un punto mide la variación que experimenta la función en dicho punto, es decir, $f'(a) = \text{T.V.I.}(a)$

$$\begin{cases} \text{Si } f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece en } x = a \\ \text{Si } f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece en } x = a \end{cases}$$

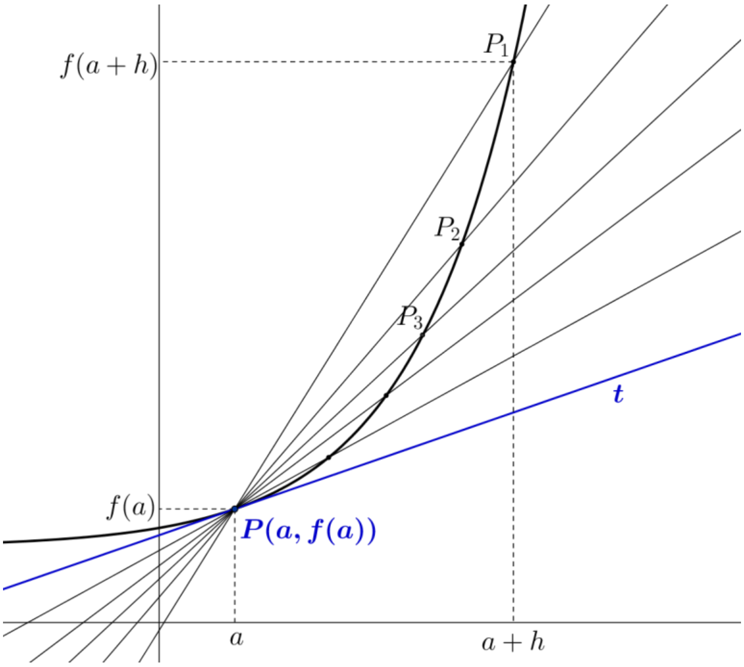
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Sea $f(x)$ una función real de variable real y sean $P(a, f(a))$ y $P_1(a+h, f(a+h))$ dos puntos de la curva.

Trazamos la recta secante a la curva que pasa por P y P_1.

La pendiente de esta recta es: $m_{\overline{PP_1}} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{T.V.M.}\left[a, a+h\right]$

¿Qué sucede cuando $h \to 0$?



$$h \to 0 \begin{cases} P_1,\ P_2,\ P_3 ... P_n ... \to P \\ \overline{PP_1},\ \overline{PP_2},\ \overline{PP_3}\ ... \to t \equiv \text{ recta tangente a la curva en el punto } P \\ m_{\overline{PP_1}} = \text{T.V.M.}\left[a, a+h\right],\ m_{\overline{PP_2}} = \text{T.V.M.}\left[a, a+h_2\right],\ m_{\overline{PP_3}} = \text{T.V.M.}\left[a, a+h_3\right] .... \to f'(a) \end{cases} \Rightarrow \boxed{f'(a) = m_t}$$

Es decir, **la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, $m_t = f'(a)$.**

<u>Ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$</u> $\boxed{y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)}$

3. FUNCIÓN DERIVADA

Se define la función derivada de $f(x)$ y se denota por $f'(x)$ como la función que asocia a cada $x \in \text{Dom}(f)$ el valor de su derivada si existe.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son derivables en su dominio.

EJEMPLO 1: Dada la función $f(x)=x^2-3x$ calcula:

a) La derivada de $f(x)$ en el punto $x=2$.

b) La función derivada de $f(x)$.

c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

d) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $r:5x-y-6=0$.

a) $$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2-3\cdot(2+h)\right]-\left[2^2-3\cdot 2\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-6-3h+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+1)=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(2)=1}$$

b) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-3\cdot(x+h)\right]-\left[x^2-3x\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h+2x-3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(h+2x-3\right)=2x-3 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f'(x)=2x-3}$$

c) <u>Recta tangente a $f(x)$ en $x=a$</u> $\left.\begin{array}{l}\text{Punto}\to P\left(a, f(a)\right)\\ \text{Pendiente}\to m_t=f'(a)\end{array}\right\}\Rightarrow y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

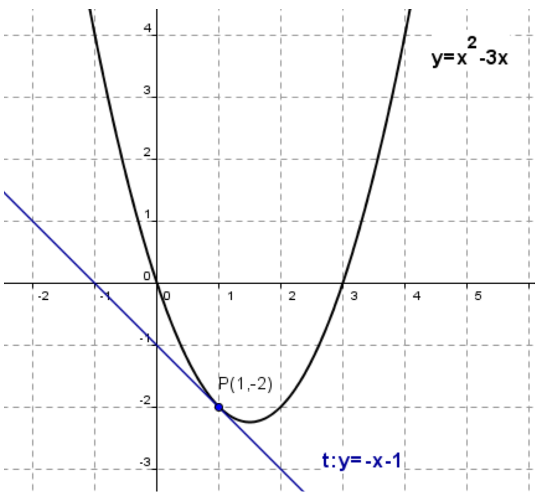
- En primer lugar, hallamos el punto de tangencia entre la recta y la función: $P\left(1, f(1)\right)\to P(1,-2)$

  $$\left.\begin{array}{l}x=1\\ f(x)=x^2-3x\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=1^2-3\cdot 1=-2 \quad\Rightarrow\quad f(1)=-2$$

- Ahora hallamos la pendiente de la recta tangente: $\begin{cases}m_t=f'(1)\\ f'(x)=2x-3\end{cases}\Rightarrow\quad m_t=2\cdot 1-3=-1 \quad\Rightarrow\quad m_t=-1$

- Finalmente determinamos la ecuación de la recta tangente pedida:

  Recta tangente a $f(x)$ en $x=1$: $t: y=-2-1(x-1) \quad\Rightarrow\quad \boxed{t: y=-x-1}$



d) Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $r: 5x - y - 6 = 0$.

- En primer lugar, hallamos la pendiente de la recta tangente:

$$\left.\begin{array}{l} r: 5x - y - 6 = 0 \Rightarrow r: y = 5x - 6 \Rightarrow m_r = 5 \\ \text{Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente} \Rightarrow m_t = m_r \end{array}\right\} \Rightarrow m_t = 5$$

- Ahora determinamos el punto de tangencia: $\left.\begin{array}{l} m_t = 5 \\ m_t = f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 5$

Es decir, el punto de tangencia es aquél en el que la derivada $(f'(x) = 2x - 3)$ toma el valor 5:

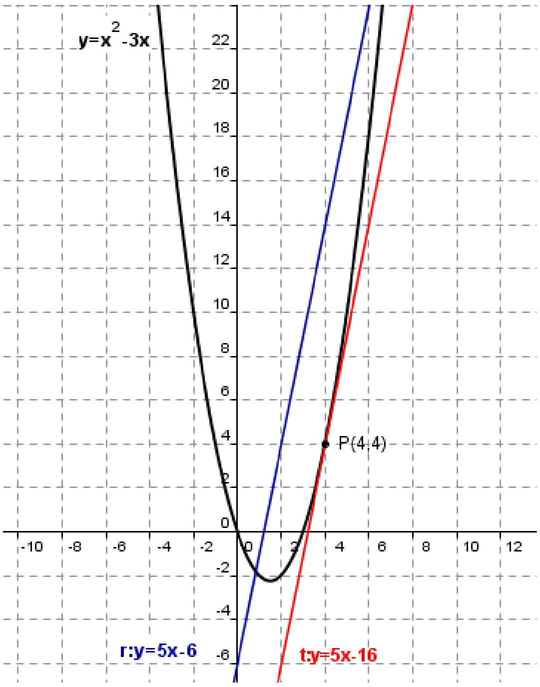
$$f'(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ f(x) = x^2 - 3x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$$

Por tanto, el punto de tangencia es $P(4, f(4)) \to P(4,4)$

- Finalmente determinamos la ecuación de la recta tangente pedida:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punto} \to P(4,4) \\ \text{Pendiente} \to m_t = 5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad t: y = 4 + 5 \cdot (x - 4) \quad \Rightarrow \quad t: y = 5x - 16$$

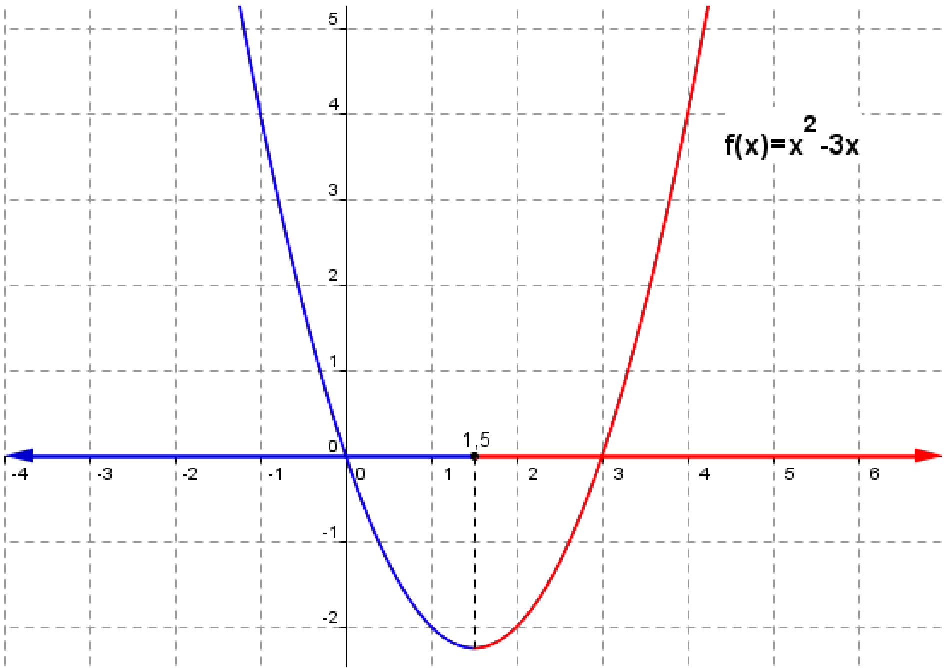


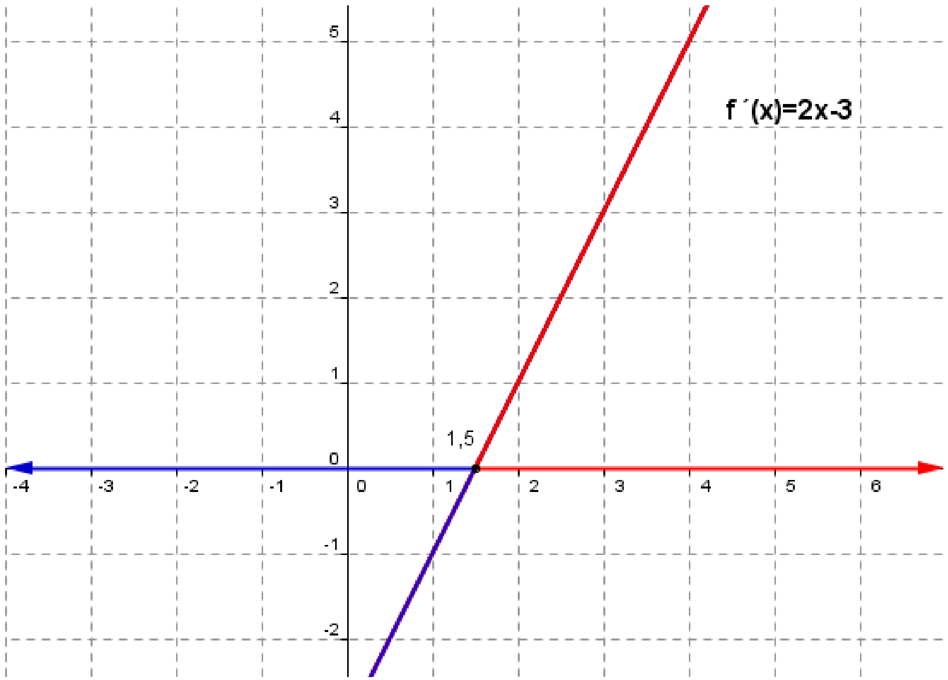
OBSERVACIÓN: El estudio de la derivada de una función nos proporciona su monotonía.

$f(x) = x^2 - 3x$

- $\mathrm{Dom}(f) = \Re$ y $f(x)$ es continua y derivable en dominio
- $f'(x) = 2x - 3$
- $f'(x) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = 3/2$

	$-\infty$	3/2	$+\infty$
Signo de $f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$ es	**decreciente**		**creciente**





EJEMPLO 2: Dada la función $f(x)=\frac{-3}{2x+1}$ calcula:

a) La derivada de $f(x)$ en el punto $x=-1$.

b) La función derivada de $f(x)$.

c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

d) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $r:5x-y-6=0$.

a) $$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3}{2(-1+h)+1}-\frac{-3}{2(-1)+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3}{-2+2h+1}-\left(\frac{-3}{-2+1}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3}{2h-1}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3-6h+3}{2h-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-6h}{2h-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-6h}{h\cdot(2h-1)}=\frac{0}{0}(\mathrm{I})=\lim_{h\to 0}\frac{-6}{2h-1}=\frac{-6}{-1}=6 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(-1)=6}$$

b) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3}{2(x+h)+1}-\frac{-3}{2x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3}{2x+2h+1}+\frac{3}{2x+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3(2x+1)+3(2x+2h+1)}{(2x+2h+1)(2x+1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-6x-3+6x+6h+3}{(2x+2h+1)(2x+1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{6h}{(2x+2h+1)(2x+1)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h\cdot(2x+2h+1)\cdot(2x+1)}=\frac{0}{0}(\mathrm{I})=\lim_{h\to 0}\frac{6}{(2x+1)(2x+1)}=\frac{6}{(2x+1)^2} \quad\Rightarrow$$

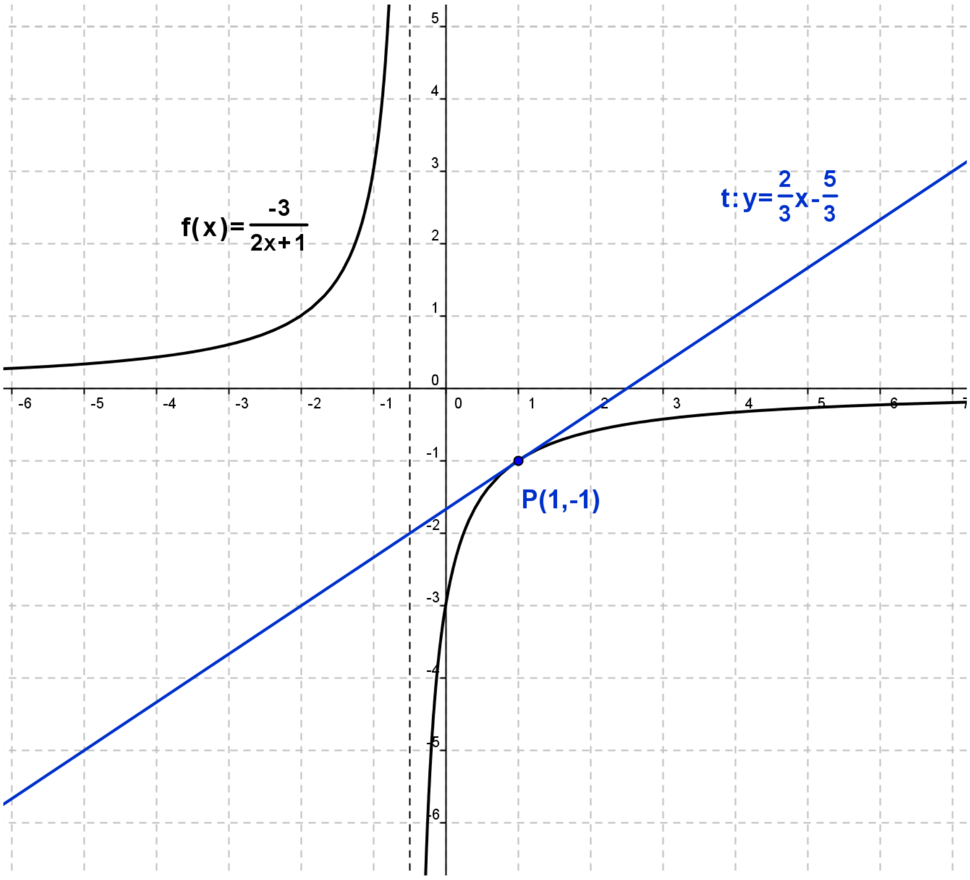
$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}}$$

c) <u>Recta tangente a $f(x)$ en $x=a$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punto}\to P\big(a, f(a)\big)\\ \text{Pendiente}\to m_t=f'(a)\end{array}\right\}\Rightarrow y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

- En primer lugar, hallamos el punto de tangencia entre recta y función: $P\big(1, f(1)\big)\to P(1,-1)$
- Ahora hallamos la pendiente de la recta tangente: $\left\{\begin{array}{l}m_t=f'(1)\\ f'(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}\end{array}\right. \Rightarrow m_t=\frac{6}{9} \Rightarrow m_t=\frac{2}{3}$
- Finalmente determinamos la ecuación de la recta tangente pedida:

  Recta tangente a $f(x)$ en $x=1$: $t: y=-1+\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow t: y=-1+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{t: y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}}$



OBSERVACIÓN: El estudio de la derivada de una función nos proporciona su monotonía.

$$f(x)=\frac{-3}{2x+1}$$

- $\text{Dom}(f)=\Re-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ y $f(x)$ es continua y derivable en se dominio
- $f'(x)=\frac{6}{(2x+1)^2} \Rightarrow f'(x)>0 \quad \forall x\in\Re-\left\{-\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow f(x)$ crece en todo su dominio

EJEMPLO 3: Dada la función $f(x)=\sqrt{x-1}$ calcula:

a) La derivada de $f(x)$ en el punto $x=2$, $f'(2)$.

b) La función derivada de $f(x)$, $f'(x)$.

c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$.

d) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $r: x-4y+1=0$.

a) $$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h-1}-1}{h}=\frac{0}{0}(\mathrm{I})=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h-1}-1)\cdot(\sqrt{2+h-1}+1)}{h\cdot(\sqrt{2+h-1}+1)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h-1})^2-(1)^2}{h\cdot(\sqrt{2+h-1}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-1-1}{h\cdot(\sqrt{2+h-1}+1)}==\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{2+h-1}+1)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{2+h-1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{f'(2)=\frac{1}{2}}$$

b) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1}}{h}=\frac{0}{0}(\mathrm{I})=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})\cdot(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}{h\cdot(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1})^2-(\sqrt{x-1})^2}{h\cdot(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-1-x+1}{h\cdot(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}=$$

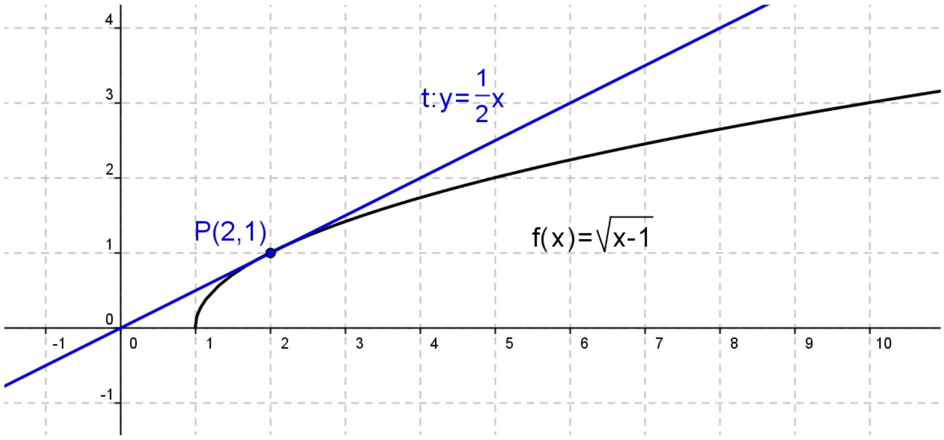
$$=\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}$$

c) <u>Recta tangente a $f(x)$ en $x=a$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punto}\to P(a, f(a))\\ \text{Pendiente}\to m_t=f'(a)\end{array}\right\}\Rightarrow y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$$

- En primer lugar, hallamos el punto de tangencia entre recta y función: $P(2, f(2))\to P(2{,}1)$
- Ahora hallamos la pendiente de la recta tangente: $\left.\begin{array}{l}m_t=f'(2)\\ \text{Por el apartado } a)\ f'(2)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow m_t=\frac{1}{2}$
- Finalmente determinamos la ecuación de la recta tangente pedida:

  Recta tangente a $f(x)$ en $x=2$: $t: y=1+\frac{1}{2}(x-2)\quad\Rightarrow\quad t: y=1+\frac{1}{2}x-1\quad\Rightarrow\quad\boxed{t: y=\frac{1}{2}x}$



d) Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la recta $r: x-4y+1=0$.

- En primer lugar, hallamos la pendiente de la recta tangente:

$$\left.\begin{array}{l} r: x-4y+1=0 \Rightarrow r: 4y=x+1 \Rightarrow r: y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \Rightarrow m_r=\frac{1}{4} \\ \text{Si dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente} \Rightarrow m_t=m_r \end{array}\right\} \Rightarrow m_t=\frac{1}{4}$$

- Ahora determinamos el punto de tangencia: $\left.\begin{array}{l} m_t=\frac{1}{4} \\ m_t=f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}$

  Es decir, el punto de tangencia es aquél en el que la derivada, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, toma el valor $\frac{1}{4}$:

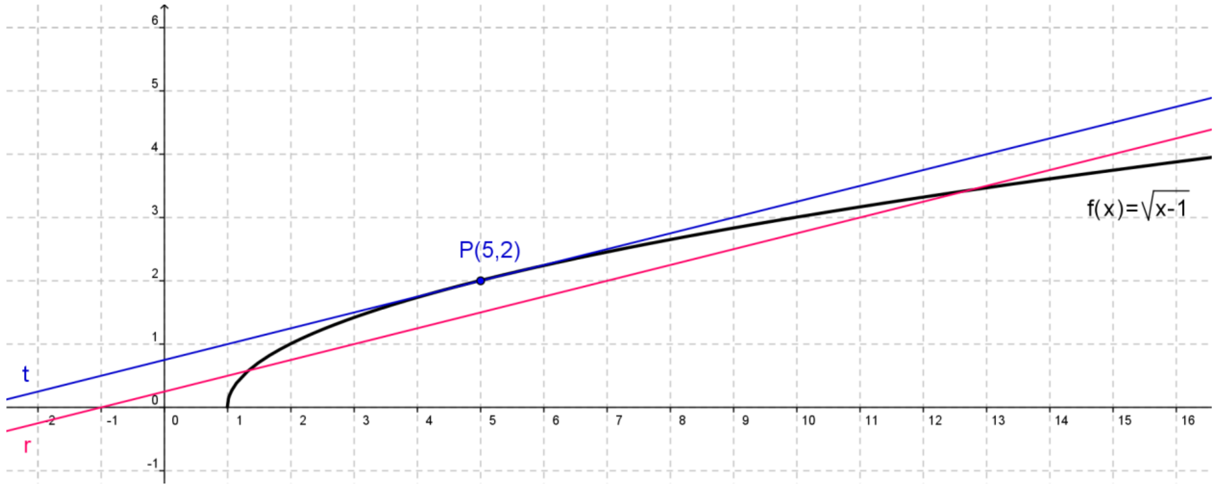
$$f'(x)=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{x-1}=4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-1}=2 \quad \Rightarrow \quad x-1=4 \quad \Rightarrow \quad x=5$$

$$\left.\begin{array}{l} x=5 \\ f(x)=\sqrt{x-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(5)=\sqrt{5-1} \quad \Rightarrow \quad f(5)=2$$

  Por tanto, el punto de tangencia es $P(5, f(5)) \to P(5,2)$

- Finalmente (utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta) determinamos la ecuación de la recta tangente pedida:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pto} \to P(5,2) \\ \text{Pendiente} \to m_t=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad t: y=2+\frac{1}{4}\cdot(x-5) \quad \Rightarrow \quad t: y=2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t: y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}$$



4. DERIVADAS LATERALES

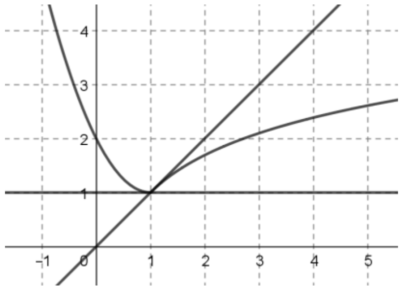
<u>Derivada lateral por la izquierda de *f*(*x*) en *x* = *a*</u>: $f'_{-}(a)=\lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

<u>Derivada lateral por la derecha de *f*(*x*) en *x* = *a*</u>: $f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } x=a \Leftrightarrow \exists\, f'_{-}(a),\ \exists\, f'_{+}(a) \quad \text{y} \quad f'_{-}(a)=f'_{+}(a)}$$

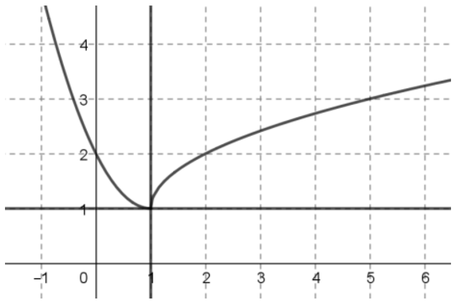
Si $f(x)$ es una función continua en $x=a$ y las derivadas laterales de $f(x)$ en $x=a$ existen pero no son iguales entonces se dice que $f(x)$ presenta en $x=a$ un **punto anguloso.** Gráficamente quiere decir que la recta tangente es diferente a ambos lados del punto de abscisa $x=a$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 1+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

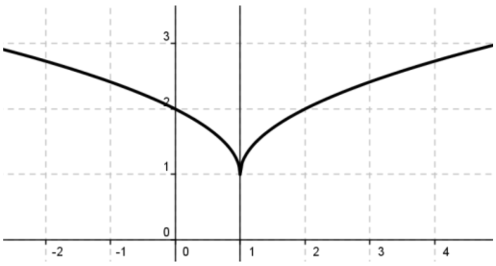


También puede suceder que una de las derivadas laterales en $x=a$ exista y la otra sea infinita. En este caso, el punto de abscisa $x=a$ también es un **punto anguloso.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \sqrt{x-1}+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$



Si $f(x)$ es continua en $x=a$ y las dos derivadas laterales de $f(x)$ en $x=a$ son infinitas y de distinto signo, entonces se dice que $f(x)$ presenta en $x=a$ un **punto de retroceso.**



5. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

- Si $f(x)$ es derivable en $x=a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=a$.
- El reciproco no es cierto, es decir, que $f(x)$ sea continua en $x=a$ no implica que también sea derivable en dicho punto ($f(x)$ es continua en $x=a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x=a$)
- Lo que sí es cierto es que si $f(x)$ NO es continua en $x=a \Rightarrow f(x)$ NO es derivable en $x=a$.

Ejemplo 1

Estudia la continuidad y la derivabilidad (utilizando la definición) de $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt{x}+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ en $x=0$

Continuidad

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}+1)=1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

2) $f(0)=(0)^2+1=1 \Rightarrow \exists\, f(0)=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x=0$

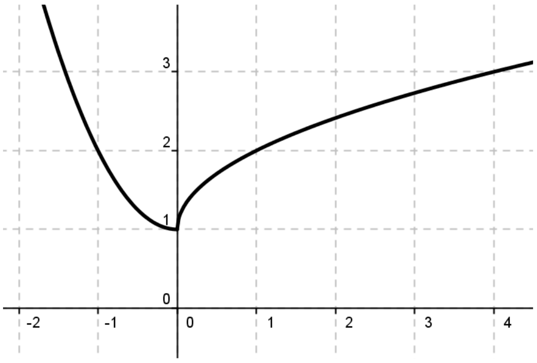
Derivabilidad

$$* \; f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[h^2+1]-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=1 \Rightarrow f'_-(0)=0$$

$$* \; f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[\sqrt{h}+1]-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\frac{1}{2}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow f'_+(0)=+\infty$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=0$. En $x=0$ hay un punto anguloso.



Ejemplo 2

Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}2^x & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad 0\le x<2\\ x^2-2x & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Dom}(y=2^x)=\Re & \Rightarrow & (-\infty,0)\in\text{Dom}(f)\\ \text{Dom}(y=1)=\Re & \Rightarrow & [0,2)\in\text{Dom}(f)\\ \text{Dom}(y=x^2-2x)=\Re & \Rightarrow & [2,+\infty)\in\text{Dom}(f)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Dom}(f)=\Re$$

- Las funciones parciales son continuas y derivables en su dominio por ser exponencial y polinómicas respectivamente $\Rightarrow f(x)$ es continua y derivable en su dominio salvo quizás en $x=0$ y $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}2^x\cdot\ln 2 & \text{si} \quad x<0\\ 0 & \text{si} \quad 0<x<2\\ 2x-2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en los puntos $x=0$ y $x=2$

$\boxed{x=0}$

Continuidad

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}(2^x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(1)=1\end{cases}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

2) $\exists\ f(0)=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x=0$

Derivabilidad

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{h\to 0^-}(2^x\cdot\ln 2)=\ln 2\Rightarrow f'_-(0)=\ln 2\\ f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{h\to 0^+}(0)=0\Rightarrow f'_+(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \quad f'_-(0)\ne f'_+(0)\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad f(x)$ no es derivable en $x=0$ y en $x=0$ hay un punto anguloso

$\boxed{x=2}$

Continuidad

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow f(x)$$ no es continua en $x=2$ y en dicho punto hay una discontinuidad de salto finito.

Derivabilidad

Como $f(x)$ no es continua en $x=2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

Solución

$f(x)$ es continua en $\Re - \{2\}$. En $x=2$ hay una discontinuidad de salto finito.

$f(x)$ es derivable en $\Re - \{0,2\}$ y $f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot \ln 2 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad 0<x<2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

En $x=0$ hay un punto anguloso y en $x=2$ no es derivable porque no es continua.