

LOGARITMOS

DEFINICIÓN $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad a > 0 \quad a \neq 1$

Logaritmo decimal: Llamamos logaritmo decimal al logaritmo en base 10 y lo designamos por $\log x$ en lugar de $\log_{10} x$.

Logaritmo neperiano: Llamamos logaritmo neperiano al logaritmo en base e y lo designamos por $\ln x$ en lugar de $\log_e x$

PROPIEDADES

- 1) $\log_a x$ existe $\Leftrightarrow x > 0$
- 2) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- 3) $\log_a a = 1$
- 4) $\log_a 1 = 0$
- 5) Logaritmo de un producto: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- 6) Logaritmo de un cociente: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- 7) Logaritmo de una potencia: $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
- 8) Cambio de base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- 9) $\log_a a^k = k$
- 10) $a^{\log_a k} = k$

EJERCICIOS

1. Calcula (aplicando la definición) el valor de los siguientes logaritmos:

1) $\log_3 27$	2) $\log_2 128$	3) $\log_{\frac{1}{2}} 64$	4) $\log_{\sqrt{2}} 32$	5) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$
6) $\log_{2\sqrt{2}} 0,25$	7) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{8}}$	8) $\log_{0,5} \sqrt[3]{16}$	9) $\ln \sqrt[5]{e^2}$	10) $\ln \frac{e^2}{\sqrt{e}}$
11) $\log 0,0001$	12) $\log 0$	13) $\log(-10)^6$	14) $\log(-10^6)$	15) $\log_5 5\sqrt{5}$
16) $\log_{\sqrt{0,01}}$	17) $\log_6 \sqrt[5]{216^{-1}}$	18) $\log_{\sqrt{\frac{1}{5}}} 0,04$	19) $\log_4 \frac{1}{\sqrt[3]{1024}}$	20) $\log_{128} \sqrt[3]{2}$
21) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[4]{3}}{9}$	22) $\log_3 \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{27}}$	23) $\log_2(-16)$	24) $\ln \frac{1}{e^3}$	25) $\log_{-3} 81$
26) $\log_5 \frac{5^{-2}}{\sqrt[3]{25}}$	27) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{\sqrt[4]{3}}$	28) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1-\sqrt{4^{-1}}}{\sqrt[3]{2}}$	29) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{0,5^2}{\sqrt[3]{128}}$	30) $\log_{\sqrt[3]{9}} \frac{0,3}{\sqrt{27}}$

2. Calcula (utilizando la definición de logaritmo) el valor de:

1) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}} - \log_3 \sqrt{243} + \log_{16} \frac{1}{4}$	2) $\log_2 \sqrt[6]{0,5} - \log_{49} \frac{1}{7} - \log_{216} 6 - \log_4 \sqrt{2\sqrt{2}}$
3) $3 \cdot \log_4 \sqrt{128} + 2 \cdot \log_8 0,25 - 8 \cdot \log_9 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	4) $\frac{1}{4} \cdot \log_3 \sqrt[3]{81} - \frac{1}{5} \cdot \log_{0,5} 32 + 12 \cdot \log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

3. Utilizando la definición de logaritmos, halla el valor de x en cada caso (**racionaliza denominadores en el resultado si fuese posible**):

1) $\log_x 7 = -2$	2) $\log_x 7 = \frac{1}{2}$	3) $\log_7 x^4 = 2$	4) $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
5) $\log_7(7x) = 2$	6) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$	7) $\log_x 0,001 = -3$	8) $\log_2 x = -\frac{1}{2}$
9) $\log_{25} x = -\frac{1}{3}$	10) $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$	11) $\log_x e = -3$	12) $\log_x 3 = -\frac{1}{3}$

4. Toma logaritmos en las siguientes expresiones y desarrolla:

1) $t = \frac{x^3 \cdot y}{z^5}$	2) $s = \sqrt{x^3 \cdot y^5 \cdot z^2}$	3) $D = \frac{A^4}{B^5 \cdot \sqrt{C}}$
4) $E = \sqrt{\frac{A}{B \cdot \sqrt[3]{C}}}$	5) $E^3 = \frac{A^2 \cdot B}{C \cdot \sqrt{D}}$	6) $E = \sqrt[3]{\frac{A^2}{B \cdot \sqrt{C} \cdot D^2}}$

5. Halla el valor de A:

1) $\frac{1}{2} \log C = 3 \log A - \log 2 + 2 \log B$	2) $\frac{1}{3} \log A = \frac{2}{3} \log B - \log C + 3 \log D$
3) $2 - \log D = 2 \log A - 3 \log B - 4 \log C$	4) $\log A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \log B + \log C - \frac{2}{3} \log D$

6. Calcula (utilizando la definición de logaritmos y/o sus propiedades) el valor de las siguientes expresiones:

1) $\log_3 [\log_2 (10 + \log 0,01)]$	2) $\log_5 (25^5 \cdot 0,008^2) =$	3) $\log_2 \left(\frac{4 \cdot 0,125^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \right) =$	4) $\log_2 \sqrt[5]{\frac{16^2}{0,5 \cdot \sqrt{2}}} =$
---------------------------------------	------------------------------------	---	---

7. Expresa en función de $\log 2$ y $\log 3$ (utiliza el cambio de base si fuese preciso):

1) $\log 12$	2) $\log 0,0002$	3) $\log \sqrt[5]{6}$	4) $\log 27000$
5) $\log \frac{\sqrt{32}}{6}$	6) $\log 0,0125$	7) $\log \sqrt[5]{0,48}$	8) $\log \frac{1}{\sqrt[4]{0,6}}$
9) $\log 3,6$	10) $\log 360$	11) $\log(5 \cdot \sqrt[3]{9})$	12) $\log(0,6 \cdot \sqrt[3]{4})$
13) $\log_3 32$	14) $\log_2 81$	15) $\log_4 0,3$	16) $\log_{\sqrt{2}} 27$
17) $\log_8 3$	18) $\log_{\sqrt{3}} 8$	19) $\log_{0,5} \sqrt[5]{3}$	20) $\log \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{0,03}$

8. Comprueba que $\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$)

9. El decibelio es la unidad que se usa para medir la sonoridad, $\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, esto es, el volumen con que percibimos un sonido determinado, donde I es la intensidad sonora, e $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado (W/m^2), la intensidad umbral que el oído humano puede percibir.

- Calcula β para sonidos con intensidades de 10^{-6} y 10^{-9} W/m^2 , respectivamente.
- Si el umbral del dolor para el ser humano está en 120 decibelios, determina qué intensidad debe tener un sonido para alcanzar dicho umbral.

10. Según la escala de Richter, las magnitudes de los terremotos se obtienen mediante la fórmula:

$$M = \frac{\log E}{1,44} - 3,64$$

siendo E la energía liberada por el seísmo en julios.

La energía liberada por un terremoto de magnitud 6,4 fue 200 veces la energía liberada por una de sus réplicas. Calcula la magnitud de esta réplica.

ALGUNAS SOLUCIONES

Ejercicio 1

1) 3	2) 7	3) -6	4) 10	5) -2/3	6) -4/3	7) 5/2	8) -4/3	9) 2/5
10) 3/2	11) -4	12) $\bar{3}$	13) 6	14) $\bar{3}$	15) 3/2	16) -1	17) -3/5	18) 4
19) -5/3	20) 1/21	21) 7/8	22) -5/4	23) $\bar{3}$	24) -3	25) $\bar{3}$	26) -8/3	27) -7/4
28) -8/3	29) 13	30) -25/4						

Ejercicio 2

1) -31/10	2) -3/8	3) 59/12	4) -2/3
-----------	---------	----------	---------

Ejercicio 3

1) $x = \sqrt{7}/7$	2) $x = 49$	3) $x = \pm\sqrt{7}$	4) $x = 16$	5) 7	6) 9
7) 10	8) $x = \sqrt{2}/2$	9) $x = \sqrt[3]{5}/5$	10) $x = 1/2$	11) $\sqrt[3]{1/e}$	12) 1/27

Ejercicio 4

1) $\log t = 3 \log x + \log y - 5 \log z$	2) $\log s = \frac{3}{2} \log x + \frac{5}{2} \log y + \log z$
3) $\log D = 4 \log A - 5 \log B - \frac{1}{2} \log C$	4) $\log E = \frac{1}{2} \log A - \frac{1}{2} \log B - \frac{1}{6} \log C$
5) $3 \log E = 2 \log A + \log B - \log C - \frac{1}{2} \log D$	6) $\log E = \frac{2}{3} \log A - \frac{1}{3} \log B - \frac{1}{6} \log C - \frac{2}{3} \log D$

Ejercicio 5

1) $A = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \sqrt{C}}{B^2}}$	2) $A = \frac{B^2 \cdot D^9}{C^3}$	3) $A = \frac{10 \cdot \sqrt{B^3} \cdot C^2}{\sqrt{D}}$	4) $A = \frac{\sqrt{10} \cdot C}{\sqrt[3]{B \cdot D^2}}$
---	------------------------------------	---	--

Ejercicio 6

1) 1	2) 4	3) -3	4) 17/10
------	------	-------	----------

Ejercicio 9

a) 60 decibelios y 30 decibelios, respectivamente

b) 1 W/m^2

Ejercicio 10

Magnitud de la réplica 4,8